10

دهمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن

چکیده مبسوط مقالات فارسی

دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
مرکز پژوهشی ریاضی ماهانی

۲۶ لغایت ۲۹ مرداد ۱۳۹۹

دهمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن

تقدیم به شادروانان علیرضا افضلی پور و فاخره صبا، بنیانگذاران دانشگاه کرمان

چکیده مبسوط مقالات فارسی

دانشکده ریاضی و کامپیوتر و مرکز پژوهشی ریاضی ماهانی

دانشگاه شهید باهنر کرمان

۲۶ لغایت ۲۹ مرداد ۱۳۹۹

فهرست مطالب

پیشگفتار . . . . . آ

کمیته علمی . . . . . پ

کمیته اجرایی . . . . . ث

برگزارکنندگان و حامیان سمینار . . . . . د

پیام چندلر دیویس . . . . . ذ

پیام پیتر رزنتهال . . . . . ر

نکوداشت استاد مهدی رجبعلی‌پور . . . . . ز

مقالات فارسی

بخش اول: سخنرانی‌ها

محمد ایزدی و نازنین قاسمی‌نژاد ۲

روش ماتریسی چندجمله‌ای و تکنیک خطی‌سازی برای تقریب جواب‌های دستگاه معادلات دیفرانسیل چِن

علی برائی‌نژاد و داود فروتن‌نیا ۸

کران پایین عملگرهای ماتریسی از فضای دنباله‌ای تفاضلی پسرو $bv_p(w)$ به فضای دنباله وزن‌دار $\ell_p(w)$

سمیرا بیاتی و حبیب‌اله سعیدی ۱۲

قیمت‌گذاری اختیار معامله سبد مرتبه کسری

رضا پورموسی ۱۸

تعیین توزیع هایپربولیک تعمیم‌یافته در یک ماتریس تصادفی

مهسا ثمره جهانی، غلامرضا آقاملایی، مهدی افتخاری و فرید صابری موحد ۲۲

انتخاب ویژگی با معیار بیشینه تصویر و کمینه افزونگی

محمد حیدری، سیدابوالفضل شاهزاده فاضلی و ندا اسحاقی ۲۸
مساله مقدار ویژه معکوس مرتبه دوم برای ماتریس پیکانی

ابوالفضل رفیع پور ۳۴
استفاده از نظریه های آموزش ریاضی در تدریس جبر خطی

زهره شفیعی و فرشید عبدالهی ۳۹
موازی سازی الگوریتم تجزیه مقادیر منفرد بر روی GPU و کاربرد آن در نهان نگاری تصاویر دیجیتال

بخش دوم: پوسترها

فرشته آراد و ایوب شیخی ۴۵
مقایسه شبکه عصبی سلسه مراتبی با تحلیل مسیر در مدل‌های رگرسیونی

مهدی رضوی ۵۱
تاثیر عملگرهای ماتریسی بر کاهش زمان تصمیم گیری در بازارهای مالی

امین رفیعی، معصومه یادگاری و هانیه رجبی ۵۴
پیش‌شرط پارامتری شامل ماتریس مکمل شور برای مسئله نقطه زینی نامتقارن با بلوک $(1,1)$ معین‌مثبت

سامان رفیعی ساردو و سوده حسینی ۶۰
تشخیص وب سایت‌های فیشینگ با یک رویکرد مبتنی بر متن کاوی

امیر محمد محرری، سید محمد مهدی حسینی و رضا دوستکی ۶۶
مقایسه محاسبه ارزش اختیار معامله اروپایی به روش های درخت دوجمله‌ای و فرمول بلک–شولز

علی محمد نظری و فاطمه سادات موسوی ۷۱
مساله مقدار ویژه معکوس ماتریس شبه سلول

نمایه نویسندگان ۷۶

پیشگفتار

سپاس و ستایش خداوند بلند مرتبه را که به ما توفیق داد تا برگزار کننده‌ی اولین سمینار مجازی و غیرحضوری از مجموعه همایش‌های انجمن ریاضی ایران بوده و امید است که بدینوسیله بتوانیم خدمتی هر چند کوچک به جامعه علمی کشور انجام داده باشیم. دهمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن که قرار بود در روزهای ۲۱ و ۲۲ اسفندماه ۱۳۹۸ در دانشگاه شهید باهنر کرمان برگزار شود، بدلیل شیوع ویروس کرونا به تعویق افتاد. بر اساس تصمیمات کمیته‌های علمی و اجرایی و هماهنگی با انجمن ریاضی ایران، تصمیم بر این شد که سمینار مذکور به صورت مجازی و آنلاین از روز بیست و ششم لغایت بیست و نهم مردادماه ۱۳۹۹ به میزبانی دانشکده ریاضی و کامپیوتر و مرکز پژوهشی ریاضی ماهانی دانشگاه شهید باهنر کرمان برگزار گردد.

این سمینار که از سری همایش‌های ملی دوسالانه انجمن ریاضی ایران در زمینه جبر خطی و کاربردهای آن است، قصد دارد فضایی صمیمی برای گفتمان محققان و متخصصان حوزه جبر خطی و جبر خطی عددی فراهم سازد و شرکت کنندگان را با کاربردهای به روز جبر خطی در علوم فنی و مهندسی و سایر شاخه ها، به ویژه داده کاوی و یادگیری ماشین که از موضوعات روز دنیا هستند، آشنا نماید. برای تحقق این هدف، در کنار برنامه سخنرانی‌های تخصصی، دو کارگاه آموزشی ’’ کاربرد جبر خطی در داده کاوی’’ و ’’نرم افزارهایی در جبر خطی عددی’’ نیز برگزار می شود. باعث افتخار است که شرایطی فراهم شد تا شرکت کنندگان، از سخنرانی‌های تخصصی ده نفر از ریاضی‌دانان برجسته جهان بهره‌مند شوند. علاوه بر این، مقالات برگزیده داخلی هم از کیفیت علمی بالایی برخوردار هستند. لازم به ذکر است که کمیته علمی سمینار با کمک اعضاء هیات علمی دانشگاه های سراسر کشور در فرایند داوری مقالات، از تعداد بیش از ۱۳۰ مقاله ارسال شده به سمینار، تعداد ۵۹ مقاله را به صورت ارائه شفاهی و ۱۷ مقاله را به صورت ارائه به شکل پوستر برگزید.

پیشینه برگزاری سمینارهای جبر خطی در ایران به سال ۱۳۷۴ باز می‌گردد که در این سال، اولین سمینار در دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان برپا شد. پس از آن، دانشگاه خلیج فارس در سال

۱۳۷۹، دانشگاه شهید باهنر کرمان در سال ۱۳۸۳، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان در سال ۱۳۸۵، دانشگاه مازندران در سال ۱۳۸۹، دانشگاه اراک در سال ۱۳۹۰، دانشگاه فردوسی مشهد در سال ۱۳۹۲، دانشگاه کردستان در سال ۱۳۹۴ و دانشگاه تبریز در سال ۱۳۹۶ میزبان برگزاری سمینارهای جبر خطی و کاربردهای آن در ایران بوده‌اند. با توجه به نقش و کاربرد جبر خطی در بسیاری از شاخه‌های علوم، انجمن ریاضی ایران، به پاس خدمات ارزنده استاد مهدی رجبعلی پور به جامعه علمی کشور، "جایزه مهدی رجبعلی پور" را بنیان نموده است و این جایزه به پژوهشگرانی که در زمینه جبر خطی و کاربردهای آن اثرات ارزشمندی دارند، اهداء می‌شود. بر این اساس، در مراسم افتتاحیه دهمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن، اهداء سومین و چهارمین دوره جایزه مهدی رجبعلی پور نیز صورت می پذیرد. همچنین در این مراسم، از این استاد فرزانه و اندیشمند، به واسطه ورود ایشان به هفتاد و پنجمین سال تولدشان تجلیل بعمل می‌آید.

در پایان، کمیته برگزارکننده سمینار از حمایتهای بی‌شائبه همه مسئولین، به ویژه ریاست محترم و معاونت محترم پژوهشی دانشگاه شهید باهنر کرمان، ریاست محترم انجمن ریاضی ایران، ریاست محترم صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور، ریاست محترم مرکز منطقه ای اطلاع رسانی علوم و فناوری، ریاست محترم و معاونت محترم توسعه مدیریت و منابع دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، ریاست محترم دانشگاه یزد، ریاست محترم دانشگاه تحصیلات تکمیلی و فناوری پیشرفته کرمان، ریاست محترم دانشگاه پیام نور کرمان، ریاست محترم مجتمع آموزش عالی بم، ریاست محترم دانشکده ریاضی و کامپیوتر و ریاست محترم مرکز پژوهشی ریاضی ماهانی دانشگاه شهید باهنر کرمان، اعضاء محترم کمیته‌های علمی و اجرایی سمینار، همکاران محترم و دانشجویان گرامی و همچنین از شرکت ملی صنایع مس ایران، گروه صنعتی بارز، بانک تجارت و سایر دست اندرکاران که در برگزاری این سمینار به هر شکل ممکن یاری رسان کادر اجرایی بوده‌اند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نماید.

با سپاس

کمیته برگزاری دهمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن

مرداد ۱۳۹۹

کمیته علمی

۱. دکتر علی آرمند نژاد (نماینده انجمن ریاضی ایران) ..... دانشگاه ولی عصر(عج) رفسنجان
۲. دکتر غلامرضا آقاملایی (دبیر کمیته اجرایی) ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۳. دکتر مراد احمد نسب ..... دانشگاه کردستان
۴. دکتر سید علیرضا اشرفی ..... دانشگاه کاشان
۵. دکتر مهدی افتخاری ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۶. دکتر حمیدرضا افشین ..... دانشگاه ولی عصر(عج) رفسنجان
۷. دکتر سعید اکبری ..... دانشگاه صنعتی شریف
۸. دکتر قاسم برید لقمانی ..... دانشگاه یزد
۹. دکتر حمید بیگی ..... دانشگاه صنعتی شریف
۱۰. دکتر آزیتا تاج الدینی (نماینده انجمن ریاضی ایران) ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۱۱. دکتر علی تقوی ..... دانشگاه مازندران
۱۲. دکتر فائزه توتونیان ..... دانشگاه فردوسی مشهد
۱۳. دکتر حسین حاجی ابوالحسن ..... دانشگاه شهید بهشتی
۱۴. دکتر علی حمزه ..... دانشگاه شیراز
۱۵. دکتر داود خجسته سالکویه ..... دانشگاه گیلان
۱۶. دکتر محمدعلی دهقان ..... دانشگاه ولی عصر(عج) رفسنجان
۱۷. دکتر مهدی رجبعلی پور (دبیر کمیته علمی) ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۱۸. دکتر حیدر رجوی ..... دانشگاه واترلو کانادا
۱۹. دکتر عظیم ریواز ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان

۲۰. دکتر عباس سالمی پاریزی (دبیر سمینار) ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۲۱. دکتر محمد شهریاری..... دانشگاه سلطان قابوس عمان
۲۲. دکتر فرشید عبدالهی ..... دانشگاه شیراز
۲۳. دکتر عطاءالله عسکری همت..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۲۴. دکتر فرزاد فتحی زاده..... دانشگاه سوانسی انگلستان
۲۵. دکتر کاظم قنبری ..... دانشگاه صنعتی سهند تبریز
۲۶. دکتر حسین محبی..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۲۷. دکتر محمود محسنی مقدم..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۲۸. دکتر محمدصال مصلحیان..... دانشگاه فردوسی مشهد
۲۹. دکتر سید محمود منجگانی..... دانشگاه صنعتی اصفهان
۳۰. دکتر حسین مومنایی..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۳۱. دکتر حسین نظام آبادی پور..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۳۲. دکتر علی محمد نظری ..... دانشگاه اراک
۳۳. دکتر احمد نیک آبادی..... دانشگاه صنعتی امیرکبیر
۳۴. دکتر بهنام هاشمی ..... دانشگاه صنعتی شیراز
۳۵. دکتر سید منصور واعظ پور ..... دانشگاه صنعتی امیرکبیر
۳۶. دکتر بامداد رضا یاحقی..... دانشگاه گلستان

کمیته اجرایی

الف- اعضای کمیته اجرایی

۱. دکتر غلامرضا آقاملایی (دبیر کمیته اجرایی) ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۲. دکتر محمد ابراهیمی ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۳. دکتر وحید امیرزاده ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۴. دکتر اسماء ایلخانی زاده منش ..... دانشگاه ولی عصر(عج) رفسنجان
۵. دکتر رضا پورموسی ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۶. دکتر آزیتا تاج الدینی ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۷. دکتر علی جباری ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۸. دکتر مینا جمشیدی ..... دانشگاه تحصیلات تکمیلی کرمان
۹. دکتر سوده حسینی ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۱۰. دکتر سید محمد مهدی حسینی ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۱۱. دکتر فاطمه خالویی ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۱۲. دکتر مریم خسروی ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۱۳. دکتر فرزاد دادی پور ..... دانشگاه تحصیلات تکمیلی کرمان
۱۴. دکتر محمدحسین دریایی ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۱۵. دکتر اسماعیل رستمی ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۱۶. دکتر شریفه رضا قلی ..... دانشگاه پیام نور کرمان
۱۷. دکتر ابوالفضل رفیع پور ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۱۸. دکتر سمیه زنگویی زاده ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان

۱۹. دکتر عباس سالمی پاریزی (دبیر سمینار) ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۲۰. دکتر حبیب الله سعیدی ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۲۱. دکتر محمد سلیمانی باغشاه ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۲۲. دکتر نصرت الله شجره پورصلواتی ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۲۳. دکتر عالمه شیخ حسینی ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۲۴. دکتر ایوب شیخی ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۲۵. دکتر فرید صابری موحد ..... دانشگاه تحصیلات تکمیلی کرمان
۲۶. دکتر احمد صفاپور ..... دانشگاه ولی عصر(عج) رفسنجان
۲۷. دکتر عطاالله عسکری همت ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۲۸. دکتر لعیا علی احمدی پور ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۲۹. دکتر فرنگیس کیانفر ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۳۰. دکتر حسین محبی ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۳۱. دکتر مهدی مصباح ..... دانشگاه ولی عصر(عج) رفسنجان
۳۲. دکتر سید احمد موسوی ..... پژوهشگاه مخابرات و الکترونیک تهران
۳۳. دکتر سید شاهین موسوی میرکلایی ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۳۴. دکتر نجمه منصوری ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۳۵. دکتر حسین مومنایی ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۳۶. دکتر اکبر نظری ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۳۷. دکتر محمدعلی نورالهی ..... مجتمع آموزش عالی بم
۳۸. دکتر محمدعلی ولی ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۳۹. دکتر عزت ولی پور ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان
۴۰. دکتر محمدعلی یعقوبی ..... دانشگاه شهید باهنر کرمان

ب- اعضای تیم هماهنگ‌کننده سخنرانی‌ها

۱. دکتر فاطمه پنجه علی بیک
۲. دکتر آزیتا تاج الدینی
۳. دکتر مریم خسروی
۴. دکتر محمدحسین دریائی
۵. دکتر اسماعیل رستمی
۶. دکتر سمیه زنگویی زاده
۷. دکتر محمد سلیمانی باغشاه
۸. دکتر حبیب الله سعیدی
۹. دکتر نصرت الله شجره پورصلواتی
۱۰. دکتر فرید صابری موحد
۱۱. دکتر سعید کرمی
۱۲. دکتر عزت ولی پور

ج- اعضای تیم پشتیبان فنی سمینار

۱. آقای سید امیرحسین ادهمی میرحسینی
۲. آقای دکتر مهدی افتخاری
۳. آقای دکتر کامبیز افروز (سرپرست تیم)
۴. آقای محمدمهدی امانی
۵. آقای محمد امیری
۶. آقای امیر ایرانمنش
۷. خانم مریم بختیاری
۸. آقای علی حسنی
۹. خانم فائزه حسنی کبوترخانی
۱۰. خانم اسماء حسین آبادی

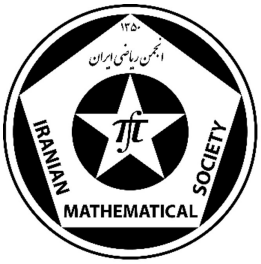
۱۱. آقای پویا حیدرآبادی
۱۲. خانم عاطفه زنگی آبادی
۱۳. آقای سجاد شفیعی
۱۴. آقای مرتضی شمس الدینی
۱۵. آقای سیاوش شهریار بهرامی
۱۶. خانم زهرا صدری
۱۷. آقای آریا صالح گوهری
۱۸. آقای دکتر محسن صانعی
۱۹. خانم ریحانه غفاری
۲۰. خانم دکتر نجمه منصوری
۲۱. آقای رحیم میرزایی

د- کمیته روابط عمومی، تولید محتوا و اطلاع رسانی

۱. آقای سید امیرحسین ادهمی میرحسینی (مسئول سایت)
۲. آقای دکتر محمدتقی انصاری (روابط عمومی)
۳. آقای مهرداد ایلاقی حسینی (طراح)
۴. آقای علی پوراسماعیلی (نویسنده متن زندگی‌نامه دکتر رجبعلی‌پور)
۵. خانم دکتر آزیتا تاج الدینی (برنامه‌ریز جلسات سخنرانی‌ها)
۶. خانم بهجت تورانی (دبیرخانه)
۷. خانم فهیمه جنگجو (روابط عمومی و تولید محتوا)
۸. خانم اکرم درانی (امور مالی)
۹. خانم صدری رویین تن (دبیرخانه)
۱۰. آقای دکتر سید محمدمهدی حسینی (برنامه‌ریز جلسات سخنرانی‌ها)
۱۱. آقای رضا دوستکی (مسئول دبیرخانه)
۱۲. خانم دکتر شریفه رضاقلی (مجری جلسات افتتاحیه و اختتامیه)

۱۳. آقای عنایت اله شمس الدینی (امور عمومی)
۱۴. آقای دکتر فرید صابری موحد (تهیه کننده کتابچه مجموعه مقاله‌های سمینار)
۱۵. آقای مهدی عبداللهی (امور عمومی)
۱۶. خانم معصومه علیدادی سلیمانی (دبیرخانه)
۱۷. آقای حسین معین الدینی (کارپرداز)
۱۸. آقای دکتر سید احمد موسوی (تهیه کننده کتابچه مجموعه مقاله‌های سمینار)
۱۹. آقای دکتر حسین مومنایی (ویراستار)

برگزارکنندگان



حامیان

پیام چندلر دیویس

Dear Abbas Salemi,

It is kind and appropriate for you to take the occasion of this impressive gathering on Linear Algebra to celebrate the 75th birthday of Professor Mehdi Radjabalipour. I am eager to add my words of appreciation and gratitude to him.

He is the bond between us, being my doctoral student and your doctoral supervisor. But in the same sense, he is the bond from the long-past Operator Theory Seminar Peter Rosenthal and I ran at the University of Toronto, to the present and future flourishing community he led at Kerman after his return to his homeland. He gave us a glimpse of this community by inviting us to his international seminar in Kerman: not virtual, I was most grateful of the opportunity to take part in person, my first and only time in Iran. What a cheerful and impressive sight you all were! I was honoured to have this connection to such a healthy school, leading in addition to fruitful contacts since that time with you and other members of the Radjabalipour circle.

Long life to Mehdi Radjabalipour and his followers, and to his school, and to his science which is our science, and to his country in this world which is our world. Let no one divide us.

Chandler Davis
August 18, 2020

پیام پیتر رزنتهال

I first met Mehdi shortly after he arrived in Toronto to begin his graduate studies. Heydar Radjavi had told me that Mehdi was a very strong student and it soon became apparent to me that Heydar was correct. Mehdi completed an excellent Ph.D. thesis under the supervision of Chandler Davis in 1973.

Over the many years since then, Mehdi oscillated between Canada and Iran.

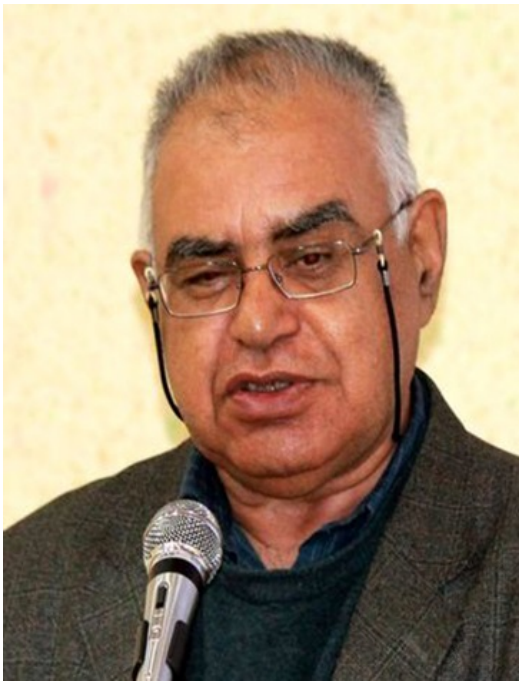
I have been very privileged to be a co-author with Mehdi on a number of papers. Mehdi is an optimal co-author. He is very knowledgeable and very creative. He is also very generous; he contributed more than his share to each of the joint papers that he and I have been involved in. Thanks Mehdi.

Moreover, Mehdi is an extremely pleasant person to talk with, about mathematics and many other things.

Happy Birthday Mehdi !!!

Peter Rosenthal
August 15, 2020

به نام حضرت دوست که هر چه داریم و دارند گوشه‌ای از دولت بی کرانه‌ی اوست



با توجه به اینکه یکی از برنامه های دهمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن، برگزاری مراسم اهدای جایزه‌ی استاد دکتر مهدی رجبعلی‌پور تعیین گردیده است، مسئولان سمینار در صدد برآمدند در این مراسم از خدمات بی نظیر این استاد عزیز تجلیل به عمل آورده و از صمیم دل و جان، سلامتی و طول عمر پربرکت او را از خدای منان تمنا نمایند؛ خاصّه امسال که به لطف حضرت حق ۷۵ ساله شده‌اند، یعنی سه چهارم یک قرن، همچون خورشیدی فروزان در کشور و به خصوص در دیار کریمان پرتوافشانی داشته‌اند. لذا بر آن شدیم که اشاره ای بسیار مختصر به زندگانی این محبوب نازنین داشته باشیم؛ باشد که قبول افتد و در نظر آید.

در بهار یک هزار و سیصد و بیست و چهار کودکی آمد به دنیا هدیه‌ی پروردگار

این کودک با گذراندن دوران کودکی و تحصیلات ابتدایی، متوسطه و عالی، به دلیل صفای باطن و حق

جو بودن و حق پذیری و تمایل به احسان، چشم و چراغ اهالی معرفت و علم بویژه دانش ریاضی گردید و به حق از سرآمدان راهیان وادی اثرگذاری و هدایت به شمار آمد.

استاد مهدی رجبعلی‌پور تحصیلات ابتدایی و متوسطه را در کرمان، دوره‌ی کارشناسی را در دانشگاه تهران و کارشناسی ارشد را در دانشگاه شیراز گذراند و با اخذ بورس تحصیلی، دوره‌ی دکتری خود را در دانشگاه تورنتو کانادا به پایان رسانید و ابتدا در دانشگاههای استان مازندران و پس از مدتی در دانشگاه شهید باهنر کرمان به عنوان عضو هیأت علمی، خدمات ارزنده و خالصانه‌ی خویش را صمیمانه و صادقانه به جامعه‌ی علمی کشور و افزون بر آن به جوامع علمی بین المللی اختصاص دادند و سپس بازنشسته‌ی همین دانشگاه شدند.

این چهره محبوب و فداکار در کنار تدریس دانش ریاضی به خصوص شاخه‌ی آنالیز، آثار میمون و مبارک دیگری نیز از خود به یادگار گذاشت که بخشی از آنها به دلیل قرار گرفتن ایشان در حلقه‌ی مؤسسات تصمیم گیر و تصمیم ساز میسر گردید. در اغلب این مراکز، ایشان عنصر اصلی و کلیدی به شمار می‌آمدند. در این یادداشت کوتاه، به بعضی از مسئولیت‌های ایشان اشاره می گردد:

۱. عضو پیوسته‌ی فرهنگستان علوم جمهوری اسلامی ایران

۲. عضو وابسته‌ی فرهنگستان زبان و ادب فارسی

۳. عضو هیأت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی

۴. عضو معمولی تا ارشد مرکز بین المللی فیزیک نظری عبدالسلام

۵. رئیس انجمن ریاضی ایران

۶. رئیس دانشکده علوم دانشگاه شهید باهنر کرمان

۷. رئیس مرکز پژوهشی ریاضی ماهانی دانشگاه شهید باهنر کرمان

۸. سردبیر بولتن انجمن ریاضی ایران

۹. معاون پژوهشی مرکز بین المللی علوم و تکنولوژی پیشرفته و علوم محیطی کرمان

۱۰. معاون پژوهشی دانشگاه شهید باهنر کرمان

۱۱. دریافت نشان درجه یک دانش از سوی رئیس جمهوری اسلامی ایران

علاوه بر خدمات ایشان در مراکز مذکور، این پژوهشگر خستگی ناپذیر تعداد ۸۷ مقاله‌ی علمی در مجلات معتبر بین المللی و تعداد ۲۶ مقاله‌ی ترویجی در مجلات داخلی به چاپ رسانده اند. همچنین تعداد ۱۳ مقاله در کنفرانسها و سمینارهای داخلی و بین المللی ارائه داده اند. سهم عمده ای از خدمات علمی و اجتماعی نامبرده به هدایت علمی بسیاری از دانشجویان رشته های ریاضی در تحصیلات تکمیلی مربوط می شود؛ این استاد مجرب، استاد راهنمای بیش از ۳۰ دانشجو در مقطع کارشناسی ارشد و ۲۱ نفر در دوره دکتری بوده اند. افزون بر آن، اثرگذاری ایشان در سمت‌های استاد مشاور و داور در بررسی پایان نامه ها و پذیرش مقالات علمی بسیار مؤثر و مهم بوده است. خوشبختانه گروهی از اساتید فعلی که تحت تعلیم ایشان بوده اند و از نعمت استادی ایشان بهره برده اند، از توانایی‌های کم‌نظیری برخوردار گردیده و هم اکنون از استوانه ها و دانشمندان ریاضی استان و کشور به شمار می‌روند.

شایان ذکر است که مسئولین و دست اندرکاران آموزش عالی کشور نیز با شناختی که از این گوهر کمیاب داشته‌اند، سعی کرده اند به نحوی تجلیل گر این استاد مبرز باشند؛ انتخاب ایشان تحت عناوین ذیل، نشانه ای از حق شناسی متصدیان علم و آموزش عالی کشور می باشد:

۱- استاد نمونه دانشگاه، ۲- نامگذاری جایزه « مهدی رجبعلی‌پور» در زمینه جبر خطی و کاربردهای از طرف انجمن ریاضی ایران، ۳- برنده‌ی جایزه جشنواره‌ی پژوهشی خوارزمی، ۴- برنده‌ی جایزه دانشگاهی مهندس افضلی پور، ۵- استاد نمونه کشوری، ۶- برگزیده‌ی اولین جشنواره‌ی چهره های ماندگار.

دامنه‌ی تأثیرگذاری ایشان بر جامعه‌ی علمی، محدود به دانش ریاضی نبوده است؛ این استاد توانمند، با توانایی و دقتی کم نظیر در حوزه‌های دیگری مانند تاریخ و به خصوص تاریخ ریاضی پژوهشهای جالبی داشته اند و حتی در بحث ادبیات نیز مؤثر بوده اند و در یافتن واژه هایی مناسب برای لغات خارجی در زبان فارسی ممارست و موفقیت داشته اند؛ به عنوان یک نمونه‌ی بسیار کوچک، چندی پیش در همین ایام «کرونا» با بررسی متون باستانی زبان فارسی و بهره گیری از گویش های محلی، واژه‌ی معادل «ماسک» را «پدام» پیشنهاد نمودند و به تعبیر یکی از اساتید ریاضی نشان دادند به همان اندازه که در دانش ریاضی مهارت دارند، در حوزه های دیگر نیز از درخشش کم نظیری برخوردارند.

در اینجا خوب است که یادی کنیم از همسر مرحومشان روان شاد سرکار خانم بتول باقری که لیسانس ریاضی و دبیر آموزش و پرورش بودند و در ایجاد و به ثمر رساندن خانه‌ی ریاضیات کرمان تلاشهای وافری داشتند و بی گمان در این مورد بخصوص نیز حضرت استاد یاور همسر دلسوز و مهربان خود بوده‌اند.

این یادداشت را با اشاره به یک قطعه که توسط یکی از دانشجویان قدیمی ایشان سروده شده، به پایان می بریم. در این سروده سعی شده است تا حدودی به بزرگی و عظمت این مرد عزیز پرداخته شود؛ اگر حرف اوّل مصراعها (ابتدا تمام مصراعهای سمت راست و سپس همه‌ی مصراعهای سمت چپ) را کنار هم بگذاریم، عبارت «استاد مهدی رجبعلی‌پور» حاصل می گردد.

ارزش هر کس به خصلت های او و شیوه هاست رسم تو رسمی دگر یک آیه از لطف خداست
سفره‌ی عشق تو در بخش ریاضی سالها جایگاه عاشقان و تشنگان آشناست
تا نوشتی پیش گفتاری برای یک اثر به غنایش تو فزودی اعتبارش از شماست
اسم خوبت در ردیف «چهره های ماندگار» عین مروارید دریا، مثل ناهید فضاست
در رخ شوخ تو آثار محبت بی شمار لابلای طنزهایت جدیّت در اختفاست
مهر تو در سینه‌ی ما ریشه دارد مستدام یاد تو پیوسته در دیباچه‌ی دلهای ماست
هم به پندار و به گفت و در دل کردار تو پرچم سبز خلوص و عشق و احسان برملاست
در بیان و شرح اوصاف و محبت های تو وصف «ایمان» چند سطر از دفتری بی انتهاست
یاد خدمت های تو در حوزه های گونه گون رهنمایی مستند بر راهیان بی ریاست

مقالات فارسی

بخش اول: سخنرانی‌ها

دانشگاه شهید باهنر کرمان، ایران
دهمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن
۲۶ لغایت ۲۹ مرداد ۱۳۹۹
Shahid Bahonar University of Kerman, Iran
Seminar on Linear Algebra and its Applications
August 16 - 19 , 2020

روش ماتریسی چندجمله‌ای و تکنیک خطی‌سازی برای تقریب جواب‌های دستگاه معادلات دیفرانسیل چِن[۱]

محمد ایزدی و نازنین قاسمی‌نژاد*

بخش ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده

در این مقاله، هدف ما یافتن تقریب‌های عددی برای جواب‌های دستگاه چِن است که یک دستگاه سه-بعدی از معادلات دیفرانسیل معمولی با جملات غیرخطی درجه دوم است. رهیافت ما بر اساس فرم ماتریسی چندجمله‌ای چبیشف و به همراه استفاده از نقاط هم‌محلی است که منجر به تبدیل دستگاه معادلات موردنظر به یک دستگاه معادلات جبری می‌شود. سپس با استفاده از تکنیک خطی‌سازی به یافتن تقریب‌های جواب دستگاه معادل با هزینه محاسباتی کمتر می‌شود. در نهایت، به ارائه یک مثال عددی به مقایسه کارایی و دقت روش‌های پیشنهادی با استفاده از نرم افزار متلب می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: دستگاه معادلات چِن، روش هم‌محلی، چندجمله‌ایهای چبیشف، خطی‌سازی

کد موضوع‌بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 41A10، 42C05، 34A08

۱ مقدمه

مدلسازی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی و مهندسی منجر به دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل اعم از آشوبناک یا غیر آشوبناک می‌شود. هدف ما در اینجا بررسی دستگاه معادلات دیفرانسیل منسوب به چِن است که به صورت زیر تعریف شده است [۵]:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = a(y-x), \\ \frac{dy(t)}{dt} = (c-a)x - xz + cy, \\ \frac{dz(t)}{dt} = xy - bz, \end{cases} \quad x(0)=\lambda_1,\ y(0)=\lambda_2,\ z(0)=\lambda_3, \quad 0 \le t \le L, \qquad (1)$$

که در آن $x(t), y(t), z(t)$ متغیرهای مجهول مساله هستند و a, b, c, L ثابت‌های مثبت هستند. همچنین $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ثابت‌های معلوم به عنوان شرایط اولیه‌اند. هدف اول ما تقریب جواب‌های دستگاه (۱) براساس توابع چبیشف شیفت داده شده است. بعبارتی ما به دنبال جوابهایی به فرم زیر برای دستگاه فوق هستیم

$$x(t) \approx x_N(t) = \sum_{n=0}^{N} a_{n,1} C_n^*(t),\ y(t) \approx y_N(t) = \sum_{n=0}^{N} a_{n,2} C_n^*(t),\ z(t) \approx z_N(t) = \sum_{n=0}^{N} a_{n,3} C_n^*(t), \qquad (2)$$

که در آن $C_n^*(t)$ دلالت بر توابع چبیشف انتقال یافته شده روی بازه $[0, L]$ می‌کنند و ضرایب مجهول $a_{n,j}$ برای $j = 1, 2, 3$ و $n = 0, 1, \ldots, N$ بایستی مشخص شوند. این روش در مقالات [۱]- [۴] و با چندجمله‌ایهای پایه‌ای متفاوتی انجام شده است. سپس، به خطی‌سازی مدل فوق می‌پردازیم و روش ماتریسی را برای سیستم خطی معادل با (۱) توسعه می‌دهیم. در ادامه بطور خلاصه به معرفی توابع چبیشف می‌پردازیم و بعد روشهای فوق را به تفصیل بیان می‌کنیم.

[۱] تقدیم به شادروانان علیرضا افضلی پور و فاخره صبا، بنیانگذاران دانشگاه کرمان

* سخنران. آدرس ایمیل: ghaseminezhad900@gmail.com

۱.۱ فرم ماتریسی چندجمله‌ایهای چبیشف

چندجمله‌ایهای کلاسیک چبیشف روی بازه $[-۱, ۱]$ بصورت بازگشتی زیر با شروع از $C_۰(z) = ۱,\ C_۱(z) = z$ تعریف می‌شوند [۲،۳]

$$C_{n+۱}(z) = ۳z\,C_n(z) - C_{n-۱}(z), \quad n = ۱, ۲, \ldots.$$

بااستفاده از جانشینی $z = ۱ - ۲t/L$ می‌توان از شیفت داده آنها روی بازه دلخواه $[۰, L]$ بهره نمود. با معرفی نماد $C_n^*(t) := C_n(z)$ به عنوان چندجمله‌ایهای چبیشف شیفت داده، می‌توان نشان داد که فرم صریح این چندجمله‌ایها برای $n = ۰, ۱, \ldots$ بصورت زیر است

$$C_n^*(t) = \sum_{k=۰}^{n} c_{n,k}\,t^k, \quad c_{n,k} = (-۱)^k \frac{n\,۲^{۲k}\,(n+k-۱)!}{(n-k)!\,L^k\,(۲k)!}, \quad k = ۰, ۱, \ldots, n, \tag{۳}$$

با $c_{۰,k} = ۱$ برای همه $k = ۰, ۱, \ldots, n$. بدلیل اینکه هدف ما نوشتن عبارات جواب در روابط (۲) از فرم اسکالر به فرم ماتریسی است، لذا به دنبال نوشتن فرم ماتریسی این چندجمله‌ایها هستیم. برای این منظور می‌توان $C_n^*(t)$ برای $n = ۰, ۱, \ldots, N$ را بصورت زیر نمایش داد

$$\boldsymbol{C}_N(t) = \boldsymbol{T}_N(t)\,\boldsymbol{D}^t \Leftrightarrow \boldsymbol{C}_N^t(t) = \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{T}_N^t(t), \tag{۴}$$

در اینجا t بیانگر عمل ترانهاده است و

$$\boldsymbol{C}_N(t) = [C_۰^*(t) \quad C_۱^*(t) \quad \ldots \quad C_N^*(t)], \quad \boldsymbol{T}_N(t) = \begin{bmatrix} ۱ & t & t^۲ & \ldots & t^N \end{bmatrix}.$$

و ماتریس بالا مثلثی $\boldsymbol{D}$ به کمک رابطه (۳) دارای درایه‌های زیر است

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & \ldots & ۱ & ۱ \\ ۰ & c_{۱,۱} & c_{۲,۱} & c_{۳,۱} & \ldots & c_{N-۱,۱} & c_{N,۱} \\ ۰ & ۰ & c_{۲,۲} & c_{۳,۲} & \ldots & c_{N-۱,۲} & c_{N,۲} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \ldots & ۰ & c_{N-۱,N-۱} & c_{N,N-۱} \\ ۰ & ۰ & ۰ & \ldots & ۰ & ۰ & c_{N,N} \end{bmatrix}_{(N+۱)\times(N+۱)}.$$

همچنین رابطه بین $\boldsymbol{T}_N(t)$ و مشتق اول آن یعنی $\frac{d}{dt}\boldsymbol{T}_N(t)$ را می‌توان بفرم ماتریسی زیر بیان نمود

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{T}_N(t) = \boldsymbol{T}_N(t)\,\boldsymbol{B}^t, \quad \boldsymbol{B}^t = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & \ldots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & \ldots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \ddots & N \\ ۰ & ۰ & ۰ & \ldots & ۰ \end{bmatrix}_{(N+۱)\times(N+۱)}. \tag{۵}$$

۲ روش مستقیم ماتریسی

اکنون با استفاده از نمادهای تعریف شده $\boldsymbol{C}_N(t)$ می‌توان جواب‌های درنظر گرفته شده در (۲) را بصورت زیر نیز بیان نمود

$$x_N(t) = \boldsymbol{C}_N(t)\,\boldsymbol{A}_{N,۱}, \quad y_N(t) = \boldsymbol{C}_N(t)\,\boldsymbol{A}_{N,۲}, \quad z_N(t) = \boldsymbol{C}_N(t)\,\boldsymbol{A}_{N,۳},$$

که در آن بردارهای مجهولات $\boldsymbol{A}_{N,j}$ برای $j = ۱, ۲, ۳$ به فرم زیرند

$$\boldsymbol{A}_{N,j} = [a_{۰,j} \quad a_{۱,j} \quad \ldots \quad a_{N,j}]^t.$$

با استفاده از نماد برداری $\boldsymbol{T}_N(t)$ تعریف شده در (۴) می‌توان جواب‌های بالا را بصورت یک فرمول واحد نمایش داد

$$x_N(t) = \boldsymbol{T}_N(t)\,\boldsymbol{D}^t\,\boldsymbol{A}_{N,1}, \quad y_N(t) = \boldsymbol{T}_N(t)\,\boldsymbol{D}^t\,\boldsymbol{A}_{N,2}, \quad z_N(t) = \boldsymbol{T}_N(t)\,\boldsymbol{D}^t\,\boldsymbol{A}_{N,3}. \tag{۶}$$

علاوه براین، مشتقات اول توابع در (۶) نسبت به زمان را می‌توان با استفاده از رابطه (۵) نوشته می‌شوند

$$\frac{dx_N(t)}{dt} = \boldsymbol{T}_N(t)\,\boldsymbol{B}^t\,\boldsymbol{D}^t\,\boldsymbol{A}_{N,1}, \quad \frac{dy_N(t)}{dt} = \boldsymbol{T}_N(t)\,\boldsymbol{B}^t\,\boldsymbol{D}^t\,\boldsymbol{A}_{N,2}, \quad \frac{dz_N(t)}{dt} = \boldsymbol{T}_N(t)\,\boldsymbol{B}^t\,\boldsymbol{D}^t\,\boldsymbol{A}_{N,3}. \tag{۷}$$

فرض کنید

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} x_N(t) \\ y_N(t) \\ z_N(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_N(t) \\ \frac{d}{dt}y_N(t) \\ \frac{d}{dt}z_N(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{N,1} \\ \boldsymbol{A}_{N,2} \\ \boldsymbol{A}_{N,3} \end{bmatrix}.$$

اکنون با معرفی نمادهای

$$\widehat{\boldsymbol{T}}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_N(t) & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_N(t) & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{T}_N(t) \end{bmatrix}, \quad \widehat{\boldsymbol{D}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}^t & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{D}^t & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{D}^t \end{bmatrix}, \quad \widehat{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^t & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{B}^t & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{B}^t \end{bmatrix},$$

می‌توان به آسانی دید

$$\boldsymbol{u}(t) = \widehat{\boldsymbol{T}}(t)\,\widehat{\boldsymbol{D}}\,\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{u}^{(1)}(t) = \widehat{\boldsymbol{T}}(t)\,\widehat{\boldsymbol{B}}\,\widehat{\boldsymbol{D}}\,\boldsymbol{A}. \tag{۸}$$

در فرم ماتریسی می‌توان نشان داد که دستگاه معادلات چن (۱) بصورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\boldsymbol{u}^{(1)}(t) - \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}_{1,2}(t) - \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{u}_{1,3}(t) = \boldsymbol{f}, \tag{۹}$$

که در آن $\boldsymbol{u}_{1,2}(t) = [x(t)y(t)]$, $\boldsymbol{u}_{1,3}(t) = [x(t)z(t)]$ و

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -a & -a & 0 \\ c-a & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}.$$

با جانشینی نقاط هم‌محلی $t_j = \frac{L}{N}j$ برای $j = 0, 1, \ldots, N$ در رابطه (۹) به دستگاه معادلات ماتریسی زیر

$$\boldsymbol{u}^{(1)}(t_j) - \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}(t_j) - \boldsymbol{u}_{1,2}(t_j) - \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{u}_{1,3}(t_j) = f, \quad j = 0, 1, \ldots, N,$$

یا بطور خلاصه به معادله ماتریس اساسی زیر می‌رسیم

$$\boldsymbol{U}^{(1)} - \widetilde{\boldsymbol{K}}\,\boldsymbol{U} - \widetilde{}\boldsymbol{U}_2 - \widetilde{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{U}_3 = \boldsymbol{F}, \tag{۱۰}$$

بطوریکه

$$\boldsymbol{U}^{(1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^{(1)}(t_0) \\ \boldsymbol{u}^{(1)}(t_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}^{(1)}(t_N) \end{bmatrix}, \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}(t_0) \\ \boldsymbol{u}(t_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}(t_N) \end{bmatrix}, \widetilde{\boldsymbol{K}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{K} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \boldsymbol{K} \end{bmatrix}, \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{f} \\ \vdots \\ \boldsymbol{f} \end{bmatrix}, \boldsymbol{U}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{1,2}(t_0) \\ \boldsymbol{u}_{1,2}(t_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_{1,2}(t_N) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{U}_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{1,3}(t_0) \\ \boldsymbol{u}_{1,3}(t_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_{1,3}(t_N) \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{M}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \boldsymbol{M} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{} = \begin{bmatrix} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \end{bmatrix}.$$

سپس با استفاده از روابط (۸) و نقاط هم‌محلی می‌توان نتیجه گرفت

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{T}\,\widehat{\boldsymbol{D}}\,\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{U}^{(1)} = \boldsymbol{T}\,\widehat{\boldsymbol{B}}\,\widehat{\boldsymbol{D}}\,\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{T} = [\widehat{\boldsymbol{T}}(t_0) \quad \widehat{\boldsymbol{T}}(t_1) \quad \dots \quad \widehat{\boldsymbol{T}}(t_N)]. \tag{۱۱}$$

به کمک نقاط هم‌محلی و جانشینی در جملات غیرخطی $\boldsymbol{u}_{1,2}(t)$, $\boldsymbol{u}_{1,3}(t)$ روابط ماتریسی زیر را داریم (۱۲)

$$\boldsymbol{U}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{1,2}(t_0) \\ \boldsymbol{u}_{1,2}(t_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_{1,2}(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t_0)x(t_0) \\ y(t_1)x(t_1) \\ \vdots \\ y(t_N)x(t_N) \end{bmatrix} = \widetilde{\boldsymbol{Y}}\,\widetilde{\boldsymbol{X}}, \quad \boldsymbol{U}_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{1,3}(t_0) \\ \boldsymbol{u}_{1,3}(t_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_{1,3}(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t_0)x(t_0) \\ z(t_1)x(t_1) \\ \vdots \\ z(t_N)x(t_N) \end{bmatrix} = \widetilde{\boldsymbol{Z}}\,\widetilde{\boldsymbol{X}},$$

با $\widetilde{\boldsymbol{Y}} = \widetilde{\boldsymbol{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{D}}\,\widetilde{\boldsymbol{A}}_2$, $\widetilde{\boldsymbol{Z}} = \widetilde{\boldsymbol{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{D}}\,\widetilde{\boldsymbol{A}}_3$, $\widetilde{\boldsymbol{X}} = \bar{\boldsymbol{T}}\,\bar{\boldsymbol{D}}\,\boldsymbol{A}$ بطوریکه

$$\widetilde{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_N(t_0) & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}_N(t_1) & \dots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{T}_N(t_N) \end{bmatrix}, \widetilde{\boldsymbol{D}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}^t & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}^t & \dots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{D}^t \end{bmatrix}, \bar{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_N(t_0) \\ \boldsymbol{T}_N(t_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{T}_N(t_N) \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_l = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{N,l} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{N,l} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{A}_{N,l} \end{bmatrix}, \; l = 2, 3, \; \bar{\boldsymbol{D}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}^t & \boldsymbol{S} & \boldsymbol{S} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}_{(N+1)\times(N+1)}.$$

با جایگذاری روابط (۱۱) و (۱۲) در معادله (۱۰) به معادله ماتریس اساسی زیر می‌رسیم

$$\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{A} = \left\{\boldsymbol{T}\,\widehat{\boldsymbol{B}}\,\widehat{\boldsymbol{D}} - \widetilde{\boldsymbol{K}}\,\boldsymbol{T}\,\widehat{\boldsymbol{D}} - \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{T}}}\,\widetilde{\boldsymbol{D}}\,\widetilde{\boldsymbol{A}}_2\,\bar{\boldsymbol{T}}\,\bar{\boldsymbol{D}} - \widetilde{\boldsymbol{M}}\,\widetilde{\boldsymbol{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{D}}\,\widetilde{\boldsymbol{A}}_3\,\bar{\boldsymbol{T}}\,\bar{\boldsymbol{D}}\right\}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F} \quad \text{یا} \quad [\boldsymbol{W};\boldsymbol{F}]$$

که یک دستگاه جبری غیرخطی شامل $3(N+1)$ مجهول به عنوان ضرایب جوابهای سیستم چِن هستند. در نهایت با وارد کردن شرایط اولیه دستگاه چِن از طریق میل دادن $t \to 0$ در رابطه (۸) و جانشینی یک سطر از معادلات $[\boldsymbol{W};\boldsymbol{F}]$، معادله ماتریس اساسی تغیریافته $[\widetilde{\boldsymbol{W}};\widetilde{\boldsymbol{F}}]$ منتج می‌شود و با حل آن جواب دستگاه چِن حاصل می‌شود.

۳ تکنیک خطی‌سازی

همانطور که در بخش قبل اشاره شد با استفاده از روش مستقیم بایستی یک دستگاه جبری غیرخطی را حل نمود که معمولا با روش نیوتن و در متلب با دستور `fsolve` انجام می‌گیرد. با افزایش تعداد جملات بسط تقریب، یعنی N، محاسبه جواب دستگاه غیرخطی زمانبر است یا حتی ممکن است روش نیوتن به جواب همگرا نباشد. برای رفع این عیوب در ادامه از روش خطی‌سازی بهره می‌بریم.

با نوشتن دستگاه (۱) به فرم $\frac{d}{dt}\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(t))$ می‌توان از روش تکراری خطی سازی شده زیر برای تقریب دستگاه فوق بهره نمود [۲]

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{r+1}(t) \approx \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_r(t)) + \boldsymbol{JF}(\boldsymbol{X}_r(t))\,(\boldsymbol{X}_{r+1}(t) - \boldsymbol{X}_r(t)),$$

که در آن $\boldsymbol{JF}$ ماتریس ژاکوبین تابع $\boldsymbol{F}$ است، r مرتبه تکرار با شروع از $r = 0$ است و شرط اولیه همان مقادیر آغازین مساله $\boldsymbol{X}_{r+1}(0) = [\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1]^t$ است. برای شروع نیاز به مقدار تابعی $\boldsymbol{X}_0(t)$ است که معمولا بردار شرایط اولیه، یعنی $[\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1]^t$ یا بردار صفر برای سادگی در نظرگرفته می‌شود. به کمک تکنیک فوق، دستگاه معادلات (۱) بصورت زیر درمی‌آید

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{r+1} = \boldsymbol{K}_r(t)\,\boldsymbol{X}_{r+1}(t) + \boldsymbol{f}_r(t), \tag{۱۳}$$

$$\boldsymbol{X}_{r+1}(t)=\begin{bmatrix}x_{r+1}(t)\\ y_{r+1}(t)\\ z_{r+1}(t)\end{bmatrix},\ \boldsymbol{K}_r(t)=\begin{bmatrix}-a & a & 0\\ c-a-z_r(t) & c & -x_r(t)\\ y_r(t) & x_r(t) & -b\end{bmatrix},\ \boldsymbol{f}_r(t)=\begin{bmatrix}0\\ y_r(t)\,z_r(t)\\ -x_r(t)\,y_r(t)\end{bmatrix}.$$

با درنظرگرفتن جواب دستگاه (۱۳) بفرم زیر

$$x_{N,r+1}(t)=\sum_{n=0}^{N}a_{n,1}^{r}C_n^*(t),\quad y_{N,r+1}(t)=\sum_{n=0}^{N}a_{n,2}^{r}C_n^*(t),\quad z_{N,r+1}(t)=\sum_{n=0}^{N}a_{n,3}^{r}C_n^*(t),\quad (۱۴)$$

جایگذاری نقاط هم‌محلی و استفاده از نمادهای بیان شده در بخش قبل معادله ماتریسی اساسی زیر نتیجه می‌شود

$$\boldsymbol{W}_r\,\boldsymbol{A}_r=\left\{\boldsymbol{T}\,\widehat{\boldsymbol{B}}\,\widehat{\boldsymbol{D}}-\widetilde{\boldsymbol{K}_r}\,\boldsymbol{T}\,\widehat{\boldsymbol{D}}\right\}\boldsymbol{A}_r=\boldsymbol{F}_r\quad \text{یا}\quad [\boldsymbol{W}_r;\boldsymbol{F}_r]\quad r=0,1,\ldots$$

که بوضوح خطی است و در آن $\widetilde{\boldsymbol{K}_r}$ و $\boldsymbol{F}_r$ همانند $\boldsymbol{K}$ و $\boldsymbol{F}$ در (۹) هستند بجزاینکه درایه‌های آنها ماتریس‌ها و بردارهای $\boldsymbol{K}_r(t_j)$ ، $\boldsymbol{f}_r(t_j)$ برای $j=0,1,\ldots,N$ تعریف شده در (۱۳) هستند. مشابه بخش قبل، با وارد کردن شرط اولیه $\boldsymbol{X}_{r+1}(0)=[\lambda_3,\lambda_2,\lambda_1]^t$ به معادلات ماتریسی $[\widetilde{\boldsymbol{W}_r};\widetilde{\boldsymbol{F}_r}]$ می‌رسیم و با حل آن جواب دستگاه چِن بطور ساده‌تری و با هزینه محاسباتی خیلی کمتر بدست می‌آید.
همچنین برای اندازه‌گیری دقت روشهای موردنظر، به محاسبه خطاهای باقیمانده می‌پردازیم که بفرم زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned}
R_{1,N}(t)&=\left|x_N^{(1)}(t)-a\,y_N(t)+a\,x_N(t)\right|\approx 0,\\
R_{2,N}(t)&=\left|y_N^{(1)}(t)-c\,x_N(t)+a\,x_N(t)+x_N(t)\,z_N(t)-c\,y_N(t)\right|\approx 0,\\
R_{3,N}(t)&=\left|z_N^{(1)}(t)+b\,z_N(t)-x_N(t)\,y_N(t)\right|\approx 0.
\end{aligned}$$

بوضوح در نقاط هم‌محلی عبارات فوق صفرند و انتظار می‌رود در مابقی نقاط بازه $[0,L]$ جملات خطاهای باقیمانده به صفر میل کنند. بطریق مشابه، خطاهای باقیمانده $R_{1,N,r+1}(t)$، $R_{2,N,r+1}(t)$، $R_{3,N,r+1}(t)$ برای دستگاه (۱۳) تعریف می‌شوند.

۴ نتایج عددی

برای تست روش ارائه شده در بخش قبل، پارامترهای مساله را بصورت زیر قرار می‌دهیم [۵]

$$a=35,\quad b=12,\quad c=28,\quad \lambda_1=-10,\quad \lambda_2=0,\quad \lambda=37,$$

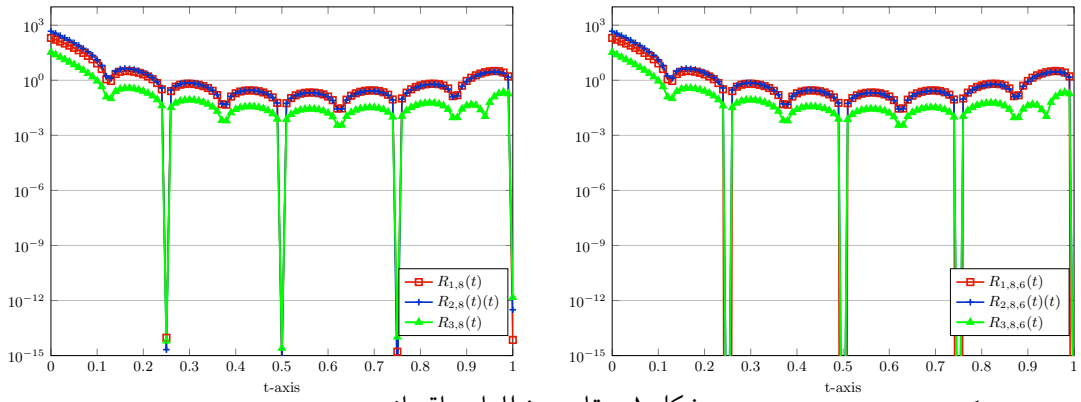
و $L=1$. با استفاده از $N=8$ جوابهای بدست آمده با چندجمله‌ایهای چبیشف با روش مستقیم ماتریسی به ازای $0\le t\le L$ بصورت زیر درمی‌آیند

$$\begin{aligned}
x_8(t)&=238/00812673949\,t^8+54/72609637160633\,t^7-2388/92287748027\,t^6\\
&+5135/06527516219\,t^5-5106/86903519418\,t^4+2813/66392994999\,t^3\\
&-880/80706913148\,t^2+146/35249439443\,t-10/0,\\
y_8(t)&=2659/09527909621\,t^8-10785/76423169932\,t^7+1827/69221103373\,t^6\\
&-1672/37833513876\,t^5+889/59528364846\,t^4-274/13047823406\,t^3+\\
&451/32366917957\,t^2-30/49015589539\,t+1/73472347597681e-17,\\
z_8(t)&=1127/72412635928\,t^8-575/20193258964\,t^7+127/49126167248\,t^6\\
&-16/05918162043\,t^5+1266/47970887571\,t^4-64/63672697888\,t^3\\
&+2112/02153724133\,t^2-41/05667219303\,t+3/70
\end{aligned}$$

با پارامترهای مشابه بالا، اگر از روش خطی‌سازی با $r = ۵$ استفاده کنیم جوابهای زیر حاصل می‌شوند

$$\begin{aligned}
x_{۸,۶}(t) &= ۲۳۸/۰۰۸۱۲۶۷۳۹۴۹۵\,t^{۸} + ۵۴/۷۲۶۰۹۶۳۷۱۵۸۷۵\,t^{۷} - ۲۳۸۸/۹۲۲۸۷۷۴۸۰۲۵\,t^{۶} \\
&\quad + ۵۱۳۵/۰۶۵۲۷۵۱۶۲۱۷\,t^{۵} - ۵۱۰۶/۸۶۹۰۳۵۱۹۴۱۸\,t^{۴} + ۲۸۱۳/۶۶۳۹۲۹۹۴۹۹۹\,t^{۳} \\
&\quad - ۸۸۰/۸۰۷۰۶۹۱۳۱۴۱۸\,t^{۲} + ۱۴۶/۳۵۲۴۹۴۳۹۴۴۳۳\,t - ۱۰/۰, \\
y_{۸,۶}(t) &= ۲۶۵۹/۰۹۵۲۷۹۰۹۶۲۲\,t^{۸} - ۱۰۷۸۵/۷۶۴۲۳۱۶۹۳۲\,t^{۷} + ۱۸۲۷۶/۹۲۲۱۱۰۳۳۷۳\,t^{۶} \\
&\quad - ۱۶۷۲۳/۷۸۳۳۵۱۳۸۷۶\,t^{۵} + ۸۸۹۵/۹۹۵۲۸۳۶۴۸۴۶\,t^{۴} - ۲۷۴۱/۳۰۴۷۸۲۳۴۰۶۶\,t^{۳} \\
&\quad + ۴۵۱/۳۲۳۶۶۹۱۷۹۵۷۷\,t^{۲} - ۳۰/۴۹۰۱۵۵۸۹۵۳۹۱۶\,t \\
z_{۸,۶}(t) &= ۱۱۲۷/۷۲۴۱۲۶۳۵۹۳۲\,t^{۸} - ۵۷۵۷/۲۰۱۹۳۲۵۸۹۸\,t^{۷} + ۱۲۷۴۹/۱۲۶۱۶۷۲۴۵\,t^{۶} \\
&\quad - ۱۶۰۵۹/۱۸۱۶۲۰۴۳۴۱\,t^{۵} + ۱۲۶۶۴/۷۹۷۰۸۸۷۵۷۳\,t^{۴} - ۶۴۶۳/۶۷۲۶۹۷۶۸۸۸۵\,t^{۳} \\
&\quad + ۲۱۱۲/۰۲۱۵۳۷۲۴۱۳۴\,t^{۲} - ۴۱۰/۵۶۶۷۲۱۹۳۰۳۲۶\,t + ۳۷/۰.
\end{aligned}$$

اولا توجه کنید ضرایب بدست آمده از هر دو روش بین ۱۴ تا ۱۶ رقم تفاوتی ندارند. ثانیا جواب‌های فوق با جوابهای بدست آمده در مرجع [۵] همخوانی زیادی دارند. در نهایت مقایسه خطاهای باقیمانده دو رهیافت فوق در شکل ۱ به نمایش گذاشته شده است.



شکل ۱: مقایسه خطاهای باقیمانده

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش ماتریسی براساس چندجمله‌ایهای چبیشف و نقاط هم‌محلی برای سیستم چن ارائه شد. در ادامه یک روش کارا بر پایه تکنیک خطی سازی برای کاهش محاسبات روش مستقیم ماتریسی توسعه داده شد. کارایی روشهای ارائه شده در قالب یک مثال عددی نشان داده شد.

مراجع

[1] M. Izadi, Fractional polynomial approximations to the solution of fractional Riccati equation, *Punjab Univ. J. Math.*, 51 (2019), No. 11, 123–141.

[2] M. Izadi, Approximate solutions for solving fractional-order Painlevé equations, *Contemp. Math.*, 1 (2019), No. 1, 12–24.

[3] M. Izadi, Comparison of various fractional basis functions for solving fractional-order logistic population model, *Facta Univ. Ser. Math. Inform.*, 35 (2020), accepted for publication.

[4] M. Izadi, S. Pourahmadi, Numerical approximation of fractional logistic equation arising in population and economic growth models, *The 50th Annual Iranian Mathematics Conference*, Shiraz, 50 (2019), 1466–1469.

[5] S. Yuzbasi, A numerical scheme for solutions of the Chen system, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 35 (2012), No. 8, 885–93.

دانشگاه شهید باهنر کرمان، ایران
دهمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن
۲۶ لغایت ۲۹ مرداد ۱۳۹۹
Shahid Bahonar University of Kerman, Iran
Seminar on Linear Algebra and its Applications
August 16 - 19 , 2020

کران پایین عملگرهای ماتریسی از فضای دنباله‌ای تفاضلی پسرو $bv_p(w)$ به فضای دنباله وزن‌دار $\ell_p(w)$[1]

علی برائی‌نژاد و داود فروتن‌نیا*

گروه ریاضی، دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان

چکیده

در این مقاله کران پایین عملگرهای ماتریسی از فضای دنباله‌ای تفاضلی پسرو $bv_p(w)$ را به فضای دنباله‌ای وزن‌دار $\ell_p(w)$ را بررسی کرده، سپس کران پایین عملگرهای ماتریسی هیلبرت و قطری را از آن نتیجه می‌گیریم.

واژه‌های کلیدی: فضای دنباله‌ای، عملگرهای ماتریسی، نرم و کران پایین

کد موضوع‌بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 26D15، 40C05، 40G05

۱ مقدمه

کران پایین عملگرها در گذشته‌های دور مورد توجه ریاضی‌دانان بسیاری بوده است به ویژه بررسی کران بالای عملگرها روی فضای دنباله‌ای سابقه دیرینه‌ای دارد و ریاضی‌دانان زیادی از جمله هاردی [2] و بروین [3] در این زمینه کار کرده و کران بالای عملگرهای سیزارو [4]، کاپسن [5] و نورلوند را محاسبه نموده‌اند [۲]. اما بحث کران پایین عملگرها از سال ۱۹۸۲ توسط لایونز [6] برای ماتریس سیزارو روی فضاهای دنباله‌ای ℓ_2 شروع شد [۳]. سپس این تحقیقات توسط ریاضی‌دانان دیگری مانند بنت [7] و چن [8] روی فضاهای دنباله‌ای ℓ_p دنبال شد و کران پایین عملگرهای سیزارو، کاپسن و هاسدورف [9] روی این فضاها دقیقا مشخص گردید. در ادامه جیمسون [10]، لشکری‌پور، فروتن‌نیا، طالبی و روپایی بحث را به فضاهای دنباله‌ای وزن‌دار و دامنه‌های ماتریسی توسعه داده و کران‌هایی برای عملگرهای خاص مانند سیزارو، کاپسن هاسدورف و هیلبرت روی این فضاها مشخص کردند. [۴].

فرض کنید $p \geqslant 1$ و $w = (w_k)$ دنباله‌ای نامنفی باشد فضای تفاضلی پسرو وزن‌دار را به صورت

$$bv_p(w) = \ell_p(w)(\Delta_B) = \left\{ x = (x_k) \ : \ \sum_{k=1}^{\infty} w_k |x_k - x_{k-1}|^p < \infty \right\},$$

تعریف می کنیم که $x_0 = 0$. برای این فضا

$$||x||_{bv_p(w)} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k |x_k - x_{k-1}|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

[1] تقدیم به شادروانان علیرضا افضلی پور و فاخره صبا، بنیانگذاران دانشگاه کرمان

*سخنران. آدرس ایمیل: foroutan@vru.ac.ir

[2] Hardy
[3] Borwein
[4] Cesaro
[5] Capson
[6] Lyons
[7] Bennett
[8] Chen
[9] Hausdorff
[10] Jemeson

یک نرم است. فضای دنباله‌ای وزن‌دار

$$l_p(w) := \left\{ x = (x_n) \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} w_n \, |x_n|^p \ < \infty \right\},$$

است که

$$||x||_{\ell_p(w)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

در این مقاله کران پایین L از عملگر ماتریسی T را به فرم

$$\|Tx\|_{\ell_p(w)} \geqslant L||x||_{bv_p(w)},$$

برای هر $x \in bv_p(w)$ بررسی کرده که در آن $\Delta x_1 \geqslant \Delta x_2 \geqslant \Delta x_3 \geqslant \cdots \geqslant 0$. ثابت L وابسته به x نیست و ما بزرگترین مقدار ممکن L را جستجو می‌کنیم و آن را با نماد $L_{bv_p(w),\ell_p(w)}(T)$ نشان می‌دهیم.

۲ نتایج اصلی

لم ۱.۲. *فرض کنید $p \geqslant 1$ و (a_j) دنباله‌ای نامنفی و نزولی و (x_j) دنباله‌ای باشد که Δx نامنفی و نزولی است و $\lim_{n\longrightarrow\infty} \Delta x_n = 0$. اگر $A_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ ($A_0 = 0$ با) و $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \Delta x_j$، آنگاه*

(۱) $S_n^p - S_{n-1}^p \geqslant (A_n^p - A_{n-1}^p)\Delta x_n^p$،

(۲) اگر $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1})x_k$ همگرا باشد آنگاه

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1})x_k \right)^p \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} A_n^p (\Delta x_n^p - \Delta x_{n+1}^p).$$

نتیجه ۲.۲. *اگر (x_j) دنباله‌ای نامنفی و نزولی باشد و $X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$، آنگاه برای هر n*

$$X_n^p - X_{n-1}^p \geqslant \left[n^p - (n-1)^p \right] x_n^p.$$

قضیه ۳.۲. *فرض کنید $p \geqslant 1$ و (w_n) دنباله‌ای نامنفی باشد که $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$. همچنین فرض کنید $T = (t_{n,k})$ یک عملگر ماتریسی نامنفی از $bv_p(w)$ به $\ell_p(w)$ باشد. اگر $W_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$ و $S_n = \sum_{i=1}^{\infty} w_i \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{\infty} t_{i,j} \right)^p$ آنگاه*

$$L_{bv_p(w),\ell_p(w)}(T)^p = \inf_n \frac{S_n}{W_n}.$$

چون

$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} w_i \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{\infty} t_{i,j} \right)^p,$$

می‌نویسیم

$$u_n = \sum_{i=1}^{\infty} w_i \left(\sum_{j=n}^{\infty} t_{i,j} \right)^p,$$

و

$$s_n = S_n - S_{n-1} = \sum_{i=1}^{\infty} w_i \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{\infty} t_{i,j} \right)^p - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k}^{\infty} t_{i,j} \right)^p \right].$$

برای $p = 1$ داریم، $u_n = s_n$.

لم ۴.۲. *فرض کنید (x_n) و (y_n) دنباله‌هایی از اعداد مثبت باشند و $X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ و $Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$.*

۱) اگر عددی مانند c وجود داشته باشد که برای هر n, $\frac{x_n}{y_n} \geqslant c$ آنگاه

$$\frac{X_n}{Y_n} \geqslant c, \quad \forall n.$$

۲) داریم $\inf \frac{X_n}{Y_n} \geqslant \inf \frac{x_n}{y_n}$.

قضیه ۵.۲. *فرض کنید $1 \leqslant p$ و $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ عملگر ماتریسی از فضای $bv_p(w)$ به فضای $\ell_p(w)$ باشد. آنگاه*

$$L_{bv_p(w),\ell_p(w)}(T)^p \geqslant \inf \left[n^p - (n-1)^p \right] \frac{u_n}{w_n}.$$

لم ۶.۲. *فرض کنید $1 \leqslant p$ و $0 < \alpha < 1$ و*

$$c_n = n^{p+\alpha-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha (k+n)^p}.$$

آنگاه $c_1 \geqslant c_n$ و از اینرو $\inf_n c_n = c_1$.

ماتریسهای هیلبرت $H_1 = (h_{n,k})$ و $H_0 = (h_{n,k})$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱]،

$$h_{n,k} = \frac{1}{n+k}, \quad h_{n,k} = \frac{1}{n+k-1}.$$

در این بخش کران پایین عملگرهای ماتریسی $H^{(1)} = H_1 \Delta_B$ و $H^{(2)} = H_0 \Delta_B$ را بدست می‌آوریم.

قضیه ۷.۲. *فرض کنید ماتریس $H^{(1)} = (h_{n,k})$ به صورت*

$$h_{n,k}^{(1)} = \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} \qquad (n,k = 1,2,\cdots),$$

تعریف شده است. اگر $w_n = \frac{1}{n^\alpha}$ که $0 < \alpha < 1$ و $1 \leqslant p$، آنگاه

$$L_{bv_p(w),\ell_p(w)}(H^{(1)}) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha (k+1)^p} \right)^{1/p}.$$

نتیجه ۸.۲.

$$L_{bv_p,\ell_p}(H^{(1)})^p = \zeta(p) - 1.$$

قضیه ۹.۲. *فرض کنید $H^{(2)} = (h_{n,k}^{(2)})$ یک عملگر ماتریسی که به صورت*

$$h_{n,k} = \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} \qquad (n,k = 1,2,\cdots).$$

تعریف شده باشد. اگر $w_n = \frac{1}{n^\alpha}$ که $0 < \alpha < 1$ و $1 \leqslant p$، آنگاه

$$l_{bv_p(w),\ell_p(w)}(H^{(2)})^p \geqslant \frac{1}{p+\alpha-1}.$$

نتیجه ۱۰.۲. *برای* $p > ۱$ *داریم*

$$L_{bv_p,\ell_p}(H^{(۲)}) \geqslant \frac{۱}{p-۱}.$$

در ادامه کران پایین عملگر قطری را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱۱.۲. *اگر* $T = (t_{n,k})$ *به صورت زیر تعریف شود*

$$t_{n,k} = \begin{cases} \frac{۱}{n} & k = n \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

آنگاه

$$L_{bv_p,\ell_p}(T) = \big(\zeta(p)\big)^{۱/p}$$

مراجع

[1] G. Jameson and R. Lashkaripour, Lower bounds of operators on weighted ℓ_p spaces and lorentz sequence spaces, *Glasgow Mathematical Journal* 42 (2000), No. 2, 211–223.

[2] G. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambrige, 1952.

[3] R.A. Lyons, lower bound on the cesaro operator, *Proceedings of the American Mathematical Society* 86 (1982), No. 4, 694.

[4] H. Ropaei and D. Foroutannia, The norms and the lower bounds for matrix operators from ℓ_p spaces into $\ell_p(\Delta^{-n})$ spaces, *Linear and Multilinear Algebra*, 67 (2019), No. 4, 767–776.

دانشگاه شهید باهنر کرمان، ایران
دهمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن
۲۶ لغایت ۲۹ مرداد ۱۳۹۹
Shahid Bahonar University of Kerman, Iran
Seminar on Linear Algebra and its Applications
August 16 - 19 , 2020

قیمت‌گذاری اختیار معامله سبد مرتبه کسری[۱]

سمیرا بیاتی و حبیب‌اله سعیدی*

بخش ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده

در بازارهای مالی برای قیمت‌گذاری اختیار معامله از معادله بلک-شولز[۲] استفاده می‌کنند و معادله بلک-شولز چند بعدی مسئله اختیار معامله سبد را مدل‌سازی می‌کند. در این میان معادلات بلک-شولز چند بعدی با مرتبه کسری مسئله ارزش‌گذاری اختیار معامله سبد را به گونه‌ای واقعی‌تر نسبت به معادله‌ی کلاسیک مدل‌بندی می‌کند. در این مقاله، ارزش اختیار معامله‌ای که شامل دو دارایی است با یک روش تفاضلات متناهی جدید در معادله بلک-شولز دو بعدی مرتبه کسری زمانی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: معادله بلک-شولز کسری زمانی، اختیار معامله سبد اروپایی، مشتق کسری ریمان-لیوویل[۳]، کاپوتو[۴]، روش تفاضلات متناهی

کد موضوع‌بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 91G80، 65F50

۱ مقدمه

می‌دانیم یکی از مشتقات مالی اختیار معامله سبد است که به دارنده خود اختیار خرید یا فروش گروهی از دارایی‌های پایه را با قیمت مشخصی در تاریخ معینی می‌دهد، که وزن هر دارایی پایه را با ω_i نشان می‌دهیم به طوریکه مجموع وزن دارایی‌های پایه برابر یک است($\sum_{i=1}^{n}\omega_i = 1$). بلک-شولز و مرتون [۵] در سال 1937 برای ارزش‌گذاری اختیار معامله خرید معادله دیفرانسیل جزئی بلک-شولز را بدست آوردند. موضوع اصلی این مقاله حل معادله دیفرانسیل دو بعدی بلک-شولز مرتبه کسری زمانی با استفاده از روش تفاضلات متناهی است. یک معادله بلک-شولز دو بعدی کسری زمانی که برای ارزش‌گذاری اختیار معامله سبد به کار برده می‌شود، به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^\alpha C}{\partial t^\alpha} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_2^2} + \rho S_1 S_2 \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1 \partial S_2} + r[S_1 \frac{\partial C}{\partial S_1} + S_2 \frac{\partial C}{\partial S_2} - C] = 0, \quad (1)$$

بطوریکه: $(S_1, S_2, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0.T)$ ، $0 < \alpha \leqslant 1$ و S_2 ، S_1 به ترتیب قیمت سهم اول و دوم، T تاریخ انقضای اختیار معامله، r نرخ بهره بدون ریسک، σ_1 ، σ_2 به ترتیب نوسان قیمت سهم اول و دوم، ρ ضریب همبستگی بین قیمت سهم اول و دوم و $C(S_1, S_2, t)$ نشان دهنده‌ی ارزش اختیار معامله با دو دارایی (S_1, S_2) در زمان t است. شرایط مرزی این معادله با معادله بلک-شولز دو بعدی یکسان است که مشتق کسری زمانی در (۱)، مشتق مرتبه کسری ریمان-لیوویل است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial^\alpha C(S_1, S_2, t)}{\partial t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_t^T \frac{C(S_1, S_2, \eta) - C(S_1, S_2, \eta)}{(\eta - t)^\alpha} d\eta, & 0 < \alpha \leqslant 1, \\ \frac{\partial C(S_1, S_2, t)}{\partial t}, & \alpha = 1, \end{cases} \quad (2)$$

که در آن $\Gamma(x)$ تابع گاماست [۳].

[۱] تقدیم به شادروانان علیرضا افضلی پور و فاخره صبا، بنیانگذاران دانشگاه کرمان

* سخنران. آدرس ایمیل: saeed@uk.ac.ir

[2] Black-scholes
[3] Riemann-liouville
[4] Caputo
[5] Merton

۲ توصیف روش

ابتدا توجه کنید که برای $۰ < \alpha \leq ۱$ داریم:

$$ {}_{۰}D_t^{\alpha} C(S_۱, S_۲, T-t) := -\frac{\partial^{\alpha} C(S_۱, S_۲, t)}{\partial t^{\alpha}} = \frac{۱}{\Gamma(۱-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_t^T \frac{C(S_۱, S_۲, \xi) - C(S_۱, S_۲, \eta)}{(\eta - T)^{\alpha}} d\eta. \quad (۳) $$

بنابراین با توجه به (۳)، مسئله (۱) را با تغییر متغیر زیر می‌توانیم به یک مسئله مقدار اولیه تبدیل کنیم [۲] :

$$ \tau = T - t, \quad (۴) $$

علاوه بر این، اگر قرار دهیم:

$$ \begin{cases} X = \ln(\frac{S_۱(t)}{S_۱(۰)}), \\ Y = \ln(\frac{S_۲(t)}{S_۲(۰)}), \\ U(X, Y, \tau) = C(S_۱(۰)e^X, S_۲(۰)e^Y, T-\tau) \end{cases} $$

آنگاه با قرار دادن آنها در (۱)، داریم:

$$ \frac{\partial^{\alpha} U}{\partial \tau^{\alpha}} = \frac{۱}{۲}\sigma_۱^۲ \frac{\partial^۲ U}{\partial x^۲} + \frac{۱}{۲}\sigma_۲^۲ \frac{\partial^۲ U}{\partial Y^۲} + \rho\sigma_۱\sigma_۲ \frac{\partial^۲ U}{\partial X \partial Y} + (r - \frac{۱}{۲}\sigma_۱^۲)\frac{\partial U}{\partial X} + (r - \frac{۱}{۲}\sigma_۲^۲)\frac{\partial U}{\partial Y} - rU, \quad (۵) $$

بطوریکه شرایط اولیه و مرزی به صورت زیرند:

$$ U(X, Y, ۰) = \max\left(w_۱ S_۱(۰)e^X + w_۲ S_۲(۰)e^Y - E, ۰\right), \quad (۶) $$

$$ U(۰, Y, \tau) = \max\left(w_۱ S_۱(۰)e^{۰} + w_۲ S_۲(۰)e^Y - Ee^{-r\tau}, ۰\right), \quad (۷) $$

$$ U(X, ۰, \tau) = \max\left(w_۱ S_۱(۰)e^X + w_۲ S_۲(۰)e^{۰} - Ee^{-r\tau}, ۰\right), \quad (۸) $$

$$ U(X, Y_{max}, \tau) = \max\left(w_۱ S_۱(۰)e^X + w_۲ S_۲(۰)e^{Y_{\max}} - Ee^{-r\tau}, ۰\right), \quad (۹) $$

$$ U(X_{\max}, Y, \tau) = \max\left(w_۱ S_۱(۰)e^{X_{\max}} + w_۲ S_۲(۰)e^Y - Ee^{-r\tau}, ۰\right). \quad (۱۰) $$

لم ۱.۲. *[۱] اگر U یک تابع دیفرانسیل پذیر زمان پیوسته باشد، آنگاه برای $۰ < \alpha \leq ۱$، مشتق کسری ریمان-لیوویل، ${}_{۰}D_t^{\alpha}$ ، با مشتق کسری کاپوتو برابر است، یعنی:*

$$ \begin{aligned} {}_{۰}D_{\tau}^{\alpha} U(X, Y, \tau) &= \frac{۱}{\Gamma(۱-\alpha)} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{۰}^{\tau} \frac{U(X, Y, \eta) - U(X, Y, ۰)}{(\tau - \eta)^{\alpha}} d\eta \\ &= \frac{۱}{\Gamma(۱-\alpha)} \int_{۰}^{\tau} \frac{\partial U(X, Y, \eta)}{\partial \eta} \frac{۱}{(\tau - \eta)^{\alpha}} d\eta \\ &=_{۰}^{c} D_{\tau}^{\alpha}(X, Y, \tau). \end{aligned} \quad (۱۱) $$

۱.۲ گسسته سازی با استفاده از روش تفاضلات متناهی

فرض کنید گام‌های فضایی قیمتی و زمانی برای $i = ۰, ۱, ..., N$ ، $j = ۰, ۱, ..., M$ و $l = ۰, ۱, ۲, ..., F$؛ به ترتیب به صورت $X_i = i\Delta X$ ، $Y_j = j\Delta Y$ و $\tau_l = l\Delta\tau$ بطوریکه $\Delta X = \frac{X_{\max}}{N}$ ، $\Delta Y = \frac{Y_{\max}}{M}$ و $\Delta\tau = \frac{T}{F}$. اگر برای هر i، j و l، قرار دهیم: $U^l_{i,j} := U(X_i, Y_j, \tau_l)$، آنگاه طبق فرمول‌های تفاضلات مرکزی برای مشتق‌های اول و دوم داریم [۴]:

$$\frac{\partial U}{\partial X}\ |_{(X_i,Y_j,\tau_l)} = \frac{U^l_{i+۱,j} - U^l_{i-۱,j}}{۲\Delta X} + O(\Delta^۲X), \tag{۱۲}$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y}\ |_{(X_i,Y_j,\tau_l)} = \frac{U^l_{i,j+۱} - U^l_{i,j-۱}}{۲\Delta Y} + O(\Delta^۲Y), \tag{۱۳}$$

$$\frac{\partial^۲ U}{\partial X^۲}\ |_{(X_i,Y_j,\tau_l)} = \frac{U^l_{i+۱,j} - ۲U^l_{i,j} + U^l_{i-۱,j}}{\Delta^۲X} + O(\Delta^۲X), \tag{۱۴}$$

$$\frac{\partial^۲ U}{\partial Y^۲}\ |_{(X_i,Y_j,\tau_l)} = \frac{U^l_{i,j+۱} - ۲U^l_{i,j} + U^l_{i,j-۱}}{\Delta^۲Y} + O(\Delta^۲Y). \tag{۱۵}$$

همچنین با ترکیب فرمول‌های (۱۲) و (۱۳) داریم:

$$\frac{\partial^۲ U}{\partial Y \partial X}\ |_{(X_i,Y_j,\tau_l)} = \frac{U^l_{i+۱,j+۱} - U^l_{i-۱,j+۱} - U^l_{i+۱,j-۱} + U^l_{i-۱,j-۱}}{۴\Delta Y \Delta X} + O(\Delta^۲X + \Delta^۲Y), \tag{۱۶}$$

لم ۲.۲. *[۱] اگر U یک تابع زمان پیوسته و $\alpha \in (۰, ۱)$ ، آنگاه:*

$$_۰D^\alpha_\tau U^l_{i,j} = Q(b_۰U^l_{i,j} - \sum_{k=۱}^{l-۱}(b_{l-k-۱} - b_{l-k})U^k_{i,j} - b_{l-۱}U^۰_{i,j})) + O(\Delta\tau)^{۲-\alpha}, \tag{۱۷}$$

که در آن $Q = \frac{۱}{\Gamma(۲-\alpha)(\Delta^\alpha\tau)}$، $b_k = (k+۱)^{۱-\alpha} - (k)^{۱-\alpha}$. واضح است که $۱ = b_۰ > b_۱ > ... > b_k$ و $\lim_{k\to\infty} b_k = ۰$.

حال، با قرار دادن $(X, Y, \tau) = (X_i, Y_j, \tau_l)$ در معادله (۵) و با استفاده از لم (۲.۲) و جایگذاری فرمول‌های تفاضلات متناهی ((۱۶) − (۱۲)) در آن داریم:

$$\begin{aligned} &-\textstyle\sum_{k=۱}^{l-۱}(b_{l-k-۱} - b_{l-k})U^k_{i,j} - b_{l-۱}U^۰_{i,j} = aU^l_{i+۱,j} + bU^l_{i,j} + dU^l_{i-۱,j} \\ &+eU^l_{i,j+۱} + pU^l_{i,j-۱} + q(U^l_{i+۱,j+۱} - U^l_{i+۱,j-۱} - U^l_{i-۱,j+۱} + U^l_{i-۱,j-۱}), \end{aligned} \tag{۱۸}$$

که در آن $i = ۱, ..., N-۱$ ، $j = ۱, ..., M-۱$ و $l = ۱, ۲, ..., F$ داریم:

$$a = \frac{\sigma_۱^۲}{۲Q\Delta^۲X} + \frac{(r - \frac{۱}{۲}\sigma_۱^۲)}{۲Q\Delta X}, \tag{۱۹}$$

$$b = -\frac{\sigma_۱^۲}{Q\Delta^۲X} - \frac{\sigma_۲^۲}{Q\Delta^۲Y} - \frac{r}{Q} - ۱, \tag{۲۰}$$

$$d = \frac{\sigma_1^2}{2Q\Delta^2 X} - \frac{(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2)}{2Q\Delta X}, \tag{۲۱}$$

$$e = \frac{\sigma_2^2}{2Q\Delta^2 Y} + \frac{(r - \frac{1}{2}\sigma_2^2)}{2Q\Delta Y}, \tag{۲۲}$$

$$p = \frac{\sigma_2^2}{2Q\Delta^2 Y} - \frac{(r - \frac{1}{2}\sigma_2^2)}{2Q\Delta Y}, \tag{۲۳}$$

$$q = \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{4Q\Delta X\Delta Y}. \tag{۲۴}$$

همچنین برای $(i = 1, ..., N-1)$، $(j = 1, ..., M-1)$ و $l = 1, ..., F$ با استفاده از شرایط مرزی و اولیه (۶)-(۱۰) فرمول‌های زیر را داریم:

$$\begin{cases} U^0_{i,j} = \max(w_1 S_1(0)e^i + w_2 S_2(0)e^j - E, 0), \\ U^l_{0,j} = \max(w_1 S_1(0)e^0 + w_2 S_2(0)e^j - Ee^{-rl}, 0), \\ U^l_{i,0} = \max(w_1 S_1(0)e^i + w_2 S_2(0)e^0 - Ee^{-rl}, 0), \\ U^l_{N,j} = \max(w_1 S_1(0)e^N + w_2 S_2(0)e^j - Ee^{-rl}, 0), \\ U^l_{i,M} = \max(w_1 S_1(0)e^i + w_2 S_2(0)e^M - Ee^{-rl}, 0). \end{cases} \tag{۲۵}$$

تعریف ۳.۲. (عملگر vec): فرض کنید A' یک ماتریس $m \times n$ باشد آنگاه $vecA'$ یک mn -بردار است که از قرار دادن ستون‌های ماتریس A' در زیر هم بوجود می‌آید بطوریکه ستون اول در بالا و ستون آخر در پایین قرار می‌گیرد.

با ثابت فرض کردن l برای $l = 1, 2, ..., F$، معادلات (۱۸) را (با قرار دادن $i = 1, 2, ..., N-1, j = 1, 2, ..., M-1$) تشکیل می‌دهیم. اگر U^l به صورت زیر، ماتریس مجهولات معادلات مذکور به ازای $l = 0, 1, ..., F$ باشد:

$$U^l = \begin{bmatrix} U^l_{11} & U^l_{12} & \dots & U^l_{1M-1} \\ U^l_{21} & U^l_{22} & \dots & U^l_{2M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U^l_{N-11} & U^l_{N-12} & \dots & U^l_{N-1M-1} \end{bmatrix}_{(N-1)\times(M-1)} \rightarrow (U^l)^T \rightarrow$$

$$V^l = \left[U^l_{11}, U^l_{12}, ..., U^l_{1M-1}, U^l_{21}, U^l_{22}, ..., U^l_{2M-1}, ..., U^l_{N-11}, U^l_{N-12}, ..., U^l_{N-1M-1}\right]^T_{[(N-1)\times(M-1)]\times 1}$$

آنگاه با قرار دادن $V^l = vec(U^l)^T$، معادلات تشکیل شده را می‌توانیم به فرم ماتریسی زیر بنویسیم:

$$D \times V^l + R^l = G^l, l = 1, 2, ..., F \tag{۲۶}$$

که در آن D یک ماتریس بلوکی سه قطری $[(N-1)\times(M-1)] \times [(N-1)\times(M-1)]$ به صورت زیر است:

$$D = \begin{bmatrix} A & B & \dots & 0 \\ C & A & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & B \\ 0 & \dots & C & A \end{bmatrix},,$$

که A، B و C ماتریس‌های سه قطری $[(N-1)\times(M-1)]$، صورت زیرند:

$$A=\begin{bmatrix} b & e & \dots & 0 \\ p & b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & e \\ 0 & \dots & p & b \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} a & q & \dots & 0 \\ -q & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & q \\ 0 & \dots & -q & a \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} d & -q & \dots & 0 \\ q & d & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -q \\ 0 & \dots & q & d \end{bmatrix},$$

درایه‌های ماتریس‌های سه قطری A، B و C از فرمول‌های ((۱۹)،(۲۴)) بدست می‌آیند. همچنین، بردار R^l که با استفاده از شرایط مرزی معادله بدست می‌آید، (۲۶) به صورت زیر است:

$$R^l = vec(R^T), \tag{۲۷}$$

که در آن ماتریس R به l نیز وابسته است:

$$R=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1M-1} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N-11} & R_{N-12} & \dots & R_{N-1M-1} \end{bmatrix}_{(N-1)\times(M-1)} \tag{۲۸}$$

لازم به ذکر است که درایه‌های ماتریس R با استفاده از شرایط اولیه و مرزی (۲۵) و از دستگاه (۱۸) به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$R_{i1}=\begin{cases} q(U^l_{0,0}-U^l_{2,0}-U^l_{0,2})+pU^l_{1,0}+dU^l_{0,1}, & i=1, \\ qU^l_{0,i-1}+dU^l_{0,i}-qU^l_{0,i+1}, & 2\le i\le N-2, \\ q(U^l_{2,N}-U^l_{0,N})+dU^l_{0,N-1}+eU^l_{1,N}, & i=N-1, \end{cases} \tag{۲۹}$$

برای $2\le j\le M-2$:

$$R_{ij}=\begin{cases} q(U^l_{j,0}-U^l_{j+2,0})+pU^l_{j+1,0}, & i=1, \\ 0, & 2\le i\le N-2, \\ q(U^l_{j+2,N}-U^l_{j,N})+eU^l_{j+1,N}, & i=N-1, \end{cases} \tag{۳۰}$$

و

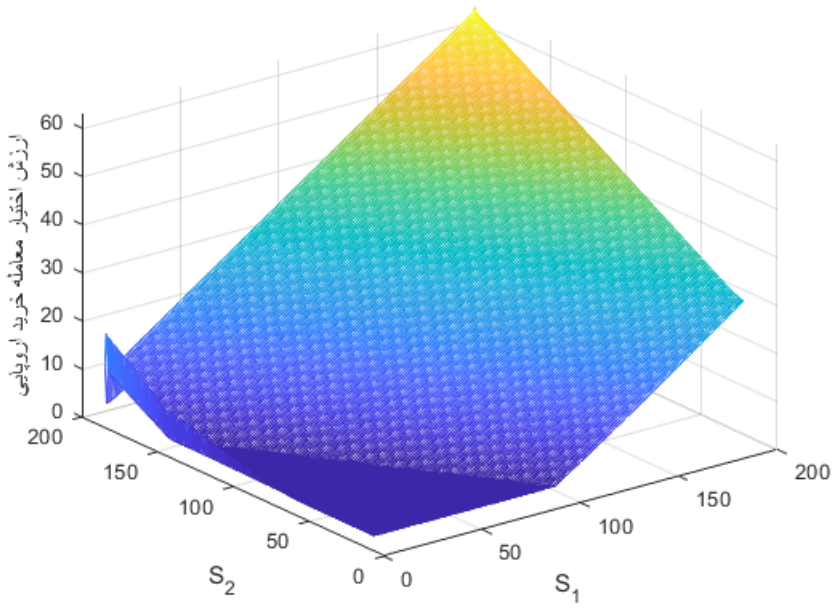
$$R_{iM-1}=\begin{cases} q(U^l_{M-2,0}-U^l_{M,0}+U^l_{M,2})+pU^l_{M-1,0}+aU^l_{M,1}, & i=1, \\ q(U^l_{M,i+1}-U^l_{M,i-1})+aU^l_{M,i}, & 2\le i\le N-2, \\ q(U^l_{M,N}-U^l_{M-2,N}-U^l_{M,N-2})+aU^l_{M,N-1}+eU^l_{M-1,N}, & i=N-1, \end{cases} \tag{۳۱}$$

G^l در معادله (۱۸)، به صورت زیر است:

$$G^l=-\sum_{k=1}^{l-1}(b_{l-k-1}-b_{l-k})V^k-b_{l-1}V^0, \tag{۳۲}$$

به طوریکه درایه‌های بردارهای V^0 و V^k به ترتیب از $(U^0)^T$ و $vec(U^k)^T$ بدست می‌آیند. برای بیان بهتر مطالب گفته شده به مثال‌های زیر توجه نمایید:

مثال ۴.۲. فرض کنید $T=1$، $K=70$، $r=5\%$، $\sigma_1=10\%$، $\sigma_2=20\%$، $\rho=0/5$، $\omega_1=0/6$، $\omega_2=0/4$، $\alpha=0/9$، $S_{1,0}=10$، $S_{2,0}=20$ بطوریکه بازه‌های افراز $0<S_1<200$ و $0<S_1<200$ هستند.



شکل ۱: *ارزش اختیار معامله خرید اروپایی با استفاده از روش تفاضلات متناهی در مدل بلک-شولز دو بعدی مرتبه کسری زمانی*

مراجع

[1] M. Magdziarz, S. Orzel, A. Weron, "Option Pricing in Subdiffusive Bachelier Model", *J Stat Phy*, 347 (1995),(2011)145,187–203.

[2] T. Guillaume, "On the multidimensional Black–Scholes partial differential equation",*Annals of Operations Research*, (2019) 281,229–251.

[3] H. Zhang, F. Liu, I. Turner, Q. Yang,"Numerical solution of the time fractional Black–Scholes model governing European options",Computers and Mathematics with Applications, 71 (2016), 1772–1783.

[4] P. Brandimarte ,"*Numerical Methods in Finance and Economics A MATLAB-Based Introduction* ",please contact our Customer Care Department within the United States, (800), 762-2974.

دانشگاه شهید باهنر کرمان، ایران
دهمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن
۲۶ لغایت ۲۹ مرداد ۱۳۹۹
Shahid Bahonar University of Kerman, Iran
Seminar on Linear Algebra and its Applications
August 16 - 19 , 2020

تعیین توزیع هایپربولیک تعمیم‌یافته در یک ماتریس تصادفی[۱]

رضا پورموسی*

بخش آمار، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده

توزیع آماری ماتریس‌های تصادفی که برای مدل‌سازی داده‌های سه طرفه استفاده می‌شود مشابه با توزیع یک متغیر تصادفی یا بردار تصادفی تعریف می‌گردد. در این مقاله به اختصار به تعریف توزیع ماتریس نرمال و تی پرداخته و با نحوه تعیین توزیع هایپربولیک تعمیم یافته در ماتریس‌های تصادفی آشنا می‌شویم.

واژه‌های کلیدی: ماتریس تصادفی، ماتریس نرمال، توزیع هایپربولیک تعمیم‌یافته، حاصلضرب کرونکر

کد موضوع‌بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 62H99، 62E15

۱ مقدمه

در تئوری احتمال ، یک ماتریس تصادفی یک ماتریس با مقادیر تصادفی بوده که ستون یا سطرهای آن یک بردار تصادفی است. به عبارت دیگر ماتریسی که درایه های آن مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی‌اند که شامل قوانین ماتریسی از قبیل تقارن، معین مثبت و غیره هستند. توزیع آماری ماتریس‌های تصادفی که برای مدل‌سازی داده‌های سه طرفه استفاده می‌شود برای محققین از اهمیت خاصی برخوردار است به عنوان مثال تحلیل همزمان متغیرهایی نظیر سن، درآمد و ... برای افراد چند شهر به تفکیک جنسیت نیازمند بررسی و تعریف ماتریس تصادفی است. ماتریس‌های تصادفی برای اولین بار توسط جان ویشارت در سال ۱۹۲۸ برای تجزیه و تحلیل آمار چند متغیره معرفی شد. در آنالیز عددی نیز ماتریس تصادفی بعد از تحقیق مشترک جان فون نویمان و هرمان گلدستین در سال ۱۹۴۷ برای توصیف خطاهای محاسبات در عملیات‌هایی مانند ضرب ماتریس استفاده شده است. از سایر علوم که در آنها ماتریس تصادفی کاربرد دارد می‌توان به فیزیک، تئوری اعداد، مهندسی مکانیک و الکترونیک اشاره کرد. برای جزئیات بیشتر در خصوص تاریخچه و کاربرد ماتریس‌های تصادفی می‌توان به تحقیقات باتیا (۱۹۹۷)، گوپتا و همکاران (۱۹۹۹) و چن و همکاران (۲۰۰۵) اشاره کرد. در این مقاله با ساختار توزیع‌های نرمال و تی در ماتریس‌های تصادفی آشنا شده و در نهایت توزیع هایپربولیک تعمیم‌یافته را برای یک ماتریس تصادفی معرفی می‌کنیم.

۱.۱ توزیع آماری یک ماتریس تصادفی:

یک روش معمول برای مدل سازی داده‌های سه طرفه استفاده از توزیع ماتریس تصادفی است. توزیع یک ماتریس تصادفی مشابه با یک متغیر تصادفی یا بردار تصادفی تعریف می‌شود. اگر $\mathbf{X}$ یک ماتریس تصادفی با ابعاد $n \times p$ باشد در این صورت تابع $f(\mathbf{x})$ به ازای $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ یک تصویر از فضای $n \times p$ بر روی اعداد حقیقی است. نمونه‌های زیادی از این توزیع‌ها وجود دارد که معروف‌ترین آن توزیع ماتریس-نرمال است که تعمیمی از توزیع نرمال چند متغیره محسوب می‌شود. این توزیع که برای ماتریس تصادفی $\mathbf{X}$ با ابعاد $n \times p$ با نماد $\mathbf{X} \sim \mathcal{MN}_{n\times p}(\mathbf{M}, \mathbf{U}, \mathbf{V})$ نمایش داده می‌شود دارای تابع چگالی احتمال به صورت زیر است:

$$f(\mathbf{x}|\mathbf{M}, \mathbf{U}, \mathbf{V}) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}tr[\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{M})^T\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{M})])}{(2\pi)^{np/2}|\mathbf{V}|^{n/2}|\mathbf{U}|^{p/2}}$$

[۱] تقدیم به شادروانان علیرضا افضلی پور و فاخره صبا، بنیانگذاران دانشگاه کرمان

* سخنران. آدرس ایمیل: pourm@uk.ac.ir

که در آن $\mathbf{M}_{n\times p}$ و $\mathbf{U}_{n\times p}$ و $\mathbf{V}_{n\times p}$ و $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n\times p}$ بوده به طوری که $\mathbf{M}$ ماتریس میانگین و $\mathbf{V}\otimes\mathbf{U}$ ماتریس کوواریانس و $\otimes$ حاصلضرب کرونکر است.

قضیه ۱.۱. *توزیع ماتریس نرمال به توزیع نرمال چند متغیره مرتبط است اگر و فقط اگر:*

$$Vec(\mathbf{X})\sim\mathcal{N}_{n\times p}(Vec(\mathbf{M}),\mathbf{V}\otimes\mathbf{U})$$

اثبات. رابطه بین توزیع ماتریس نرمال با توزیع نرمال چند متغیره را می‌توان با استفاده از خواص اثر ماتریس و حاصلضرب کرونکر ، به شرح زیر نشان داد:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}tr[\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{M})^T\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{M})]\\
=\;&-\frac{1}{2}Vec(\mathbf{X}-\mathbf{M})^TVec(\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{M})\mathbf{V}^{-1})\\
=\;&-\frac{1}{2}Vec(\mathbf{X}-\mathbf{M})^T(\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{U}^{-1})Vec(\mathbf{X}-\mathbf{M})\\
=\;&-\frac{1}{2}[Vec(\mathbf{X})-Vec(\mathbf{M})]^T(\mathbf{V}\otimes\mathbf{U})^{-1}[Vec(\mathbf{X})-Vec(\mathbf{M})]
\end{aligned}$$

حال با مقایسه این عبارت و تابع چگالی احتمال X و استفاده از خاصیت

$$|\mathbf{V}\otimes\mathbf{U}|=|\mathbf{V}|^n|\mathbf{U}|^p$$

اثبات تمام می‌شود. □

حال اگر $\mathbf{X}\sim\mathcal{MN}_{n\times p}(\mathbf{M},\mathbf{U},\mathbf{V})$ در این صورت خواص زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X}^T\sim\mathcal{MN}_{n\times p}(\mathbf{M}^T,\mathbf{U},\mathbf{V})\\
&E[\mathbf{X}]=\mathbf{M}\\
&E[(\mathbf{X}-\mathbf{M})(\mathbf{X}-\mathbf{M})^T]=\mathbf{U}tr(\mathbf{V})\\
&E[(\mathbf{X}-\mathbf{M})^T(\mathbf{X}-\mathbf{M})^T]=\mathbf{V}tr(\mathbf{U})\\
&E[\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^T]=\mathbf{U}tr(\mathbf{A}^T\mathbf{V})+\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{M}^T\\
&E[\mathbf{X}^T\mathbf{B}\mathbf{X}]=\mathbf{V}tr(\mathbf{U}\mathbf{B}^T)+\mathbf{M}^T\mathbf{B}\mathbf{M}\\
&E[\mathbf{X}\mathbf{C}\mathbf{X}]=\mathbf{V}\mathbf{C}^T\mathbf{U}+\mathbf{M}\mathbf{C}\mathbf{M}
\end{aligned}$$

تعریف ۲.۱ (ماتریس ویشارت)**.** به ماتریس متقارن $\mathbf{M}_{p\times p}$ ماتریس ویشارت می‌گویند هرگاه

$$\mathbf{M}=\frac{1}{n}\mathbf{X}^T\mathbf{X}$$

که در آن $\mathbf{X}$ یک ماتریس تصادفی نرمال با ابعاد $n\times p$ است.

به طریق مشابه می‌توان توزیع ماتریس تی را معرفی کرد. تابع چگالی این ماتریس با ابعاد $n\times p$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(\mathbf{x};\nu,\mathbf{M},\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Omega})=K\times|\mathbf{I}+\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{M})\mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{M})^T|^{\frac{\nu+n+p-1}{2}}$$

که در آن $\mathcal{M}_{n\times p}$، $\Omega_{p\times p}$ و $\Sigma_{n\times n}$ و ν درجه آزادی و همچنین

$$K=\frac{\Gamma_p(\frac{\nu+n+p-1}{2})}{(\pi)^{\frac{np}{2}}\Gamma_p(\frac{\nu-p-1}{2})}|\mathbf{\Omega}|^{-\frac{n}{2}}|\mathbf{\Sigma}|^{-\frac{p}{2}}.$$

ثابت تابع چگالی و Γ_p تابع گامای p متغیره است.

۲ معرفی توزیع هایپربولیک تعمیم یافته در ماتریس‌های تصادفی:

اگر چه توزیع نرمال نقش اساسی در تحلیل داده‌های آماری دارد اما در حضور داده‌های پرت و همچنین چوله عملکرد ضعیفی دارد. برای رفع این مشکل می‌توان به خانواده توزیع‌های چوله(آزالینی، ۱۹۸۵) و خانواده توزیع‌های آمیخته میانگین-واریانس نرمال(بارندورف-نلسن، ۱۹۷۷) اشاره کرد. معروف‌ترین توزیع در خانواده توزیع‌های آمیخته میانگین-واریانس نرمال، توزیع هایپربولیک تعمیم‌یافته است که بر پایه توزیع آمیزنده نرمال معکوس تعمیم یافته تعریف شده و توانسته در حالت یک و چندمتغیره کارایی خوبی از خود در کاربرد نشان دهد. این توزیع در سال ۲۰۱۵ توسط پورموسی و همکاران بر پایه توزیع آمیزنده بیرنبام ساندرز با یک پارامتر کمتر تعمیم داده شده است. در این بخش به معرفی توزیع هایپربولیک تعمیم یافته در ماتریس‌های تصادفی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲. ماتریس تصادفی $\mathbf{X}_{n\times p}$ دارای توزیع هایپربولیک تعمیم یافته است. هرگاه

$$\mathbf{X} = \mathbf{M} + W\mathbf{A} + \sqrt{W}\mathbf{Z},$$

که در آن $\mathbf{M}$ و $\mathbf{A}$ ماتریس‌های $n \times p$ و $W \sim GIG(\nu, \alpha, \beta)$ و $\mathbf{Z} \sim \mathcal{MN}_{n\times p}(0, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Psi})$ است که در آن تابع چگالی GIG به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(w) = \frac{(\frac{\beta}{\alpha})^{\frac{\nu}{2}}}{2K_\nu(\sqrt{\alpha\beta})}\ \exp\{-\frac{1}{2}(\alpha w^{-1} + \beta w)\}$$

با استفاده از توزیع هایپربولیک تعمیم‌یافته تعریف شده در رابطه فوق که از این پس با نماد $\mathbf{X} \sim MGH_{n\times p}(\mathbf{M}, \mathbf{A}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Psi}, \nu, \alpha, \beta)$ نمایش داده می‌شود، به سادگی می‌توان نشان داد:

$$\mathbf{X}|w \sim \mathcal{N}_{n\times p}(\mathbf{M} + w\mathbf{A}, w\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Psi})$$

از طرفی

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, w) &= f(\mathbf{x}|w)f(w) \\ &= \frac{(\frac{\beta}{\alpha})^{\frac{\nu}{2}}}{2K_\nu(\sqrt{\alpha\beta})(2\pi)^{\frac{np}{2}}|\mathbf{\Sigma}|^{\frac{n}{2}}|\mathbf{\Psi}|^{\frac{p}{2}}} w^{\nu-\frac{np}{2}-1} \\ &\quad \times \exp\{-\frac{1}{2}[tr(\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{M}-w\mathbf{A})\mathbf{\Psi}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{M}-w\mathbf{A})' + \alpha)w^{-1} + \beta w]\}, \end{aligned}$$

عبارت نمایی رابطه فوق را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\exp\{tr(\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{M})\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{A}')\} \times \exp\{-\frac{1}{2}[\delta(\mathbf{x}; \mathbf{M}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Psi})w^{-1} + \rho(\mathbf{A}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Psi})w]\},$$

که در آن

$$\delta(\mathbf{x}; \mathbf{M}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Psi}) = tr(\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{M})\mathbf{\Psi}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{M})')$$

و

$$\rho(\mathbf{A}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Psi}) = tr(\Sigma^{-1}\mathbf{A}\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{A}')$$

حال با استفاده از روابط فوق و تعریف تابع چگالی کناری می توان تابع چگالی ماتریس تصادفی هایپربولیک تعمیم یافته را به صورت زیر تعیین کرد:

$$f(\mathbf{x}) = \int_0^\infty f(\mathbf{x}, w)dw$$

$$= \frac{(\frac{\beta}{\alpha})^{\frac{\nu}{2}}}{2K_{\nu}(\sqrt{\alpha\beta})(2\pi)^{\frac{np}{2}}|\mathbf{\Sigma}|^{\frac{n}{2}}|\mathbf{\Psi}|^{\frac{p}{2}}} \exp\{tr(\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{M})\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{A}')\}$$
$$\times \int_{0}^{\infty} w^{\nu-\frac{np}{2}-1} \exp\{-\frac{1}{2}[\delta(\mathbf{x};\mathbf{M},\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Psi})w^{-1} + \rho(\mathbf{A},\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Psi})w]\}dw.$$

حال می توان انتگرال فوق را بر حسب تابع بسل تعمیم یافته نوع سوم نوشت که در این صورت داریم:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{(\frac{\beta}{\alpha})^{\frac{\nu}{2}}}{K_{\nu}(\sqrt{\alpha\beta})(2\pi)^{\frac{np}{2}}|\mathbf{\Sigma}|^{\frac{n}{2}}|\mathbf{\Psi}|^{\frac{p}{2}}} \left(\frac{\delta(\mathbf{x};\mathbf{M},\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Psi})}{\rho(\mathbf{A},\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Psi})+\beta}\right)^{\frac{2\nu-np}{4}}$$
$$\times K_{\nu-\frac{np}{2}}\left(\sqrt{[\rho(\mathbf{A},\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Psi})+\beta][\delta(\mathbf{x};\mathbf{M},\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Psi})]}\right) \exp\{tr(\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{M})\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{A}')\}.$$

قضیه ۲.۲. *توزیع ماتریس هایپربولیک تعمیم‌یافته به توزیع هایپربولیک تعمیم‌یافته چند متغیره مرتبط است اگر و فقط اگر:*

$$Vec(\mathbf{X}) \sim MGH_{np}(Vec(\mathbf{M}), Vec(\mathbf{A}), \mathbf{\Psi}\otimes\mathbf{\Sigma}, \nu, \alpha, \beta) \qquad (1)$$

که در آن $MGH_{np}(.)$ نشان‌دهنده توزیع هایپربولیک تعمیم‌یافته چند متغیره است.

اثبات. با استفاده از قضیه ۱.۱ و رابطه بین توزیع ماتریس هایپربولیک تعمیم‌یافته با توزیع نرمال چند متغیره، اثبات به سادگی انجام می‌شود. □

مراجع

[1] A. Azzalini, A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics,* 12(1985), 171-178.

[2] A. K. Gupta and D. K. Nagar, Matrix Variate Distributions. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, (1999).

[3] J. A. Domınguez-Molina, G. Gonzalez-Farıas, R. Ramos-Quiroga, and A. K. Gupta, A matrix variate closed skew-normal distribution with applications to stochastic frontier analysis. *Communications in Statistics–Theory and Methods,* 36(2007), No. 9, 1691–1703.

[4] J. T. Chen, and A. K. Gupta, Matrix variate skew-normal distributions. *Statistics*, 39(2005), No. 3, 247–253.

[5] O. E. Barndorff-Nielsen, Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size. *Proceedings of the royal society of London,* 353(1977), 401-419.

[6] R. Bhatia, Matrix Analysis, Springer-Verlage, New York, (1997)

[7] R. Pourmous, A. Jamalizadeh and M. Rezapour, Multivariate normal mean-variance mixture distribution based on Birnbaum-Saunders distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation,* 85(2015), 2736-2749.

دانشگاه شهید باهنر کرمان، ایران
دهمین سمینار جبر خطی
و کاربردهای آن
۲۶ لغایت ۲۹ مرداد ۱۳۹۹
10
Shahid Bahonar University of Kerman, Iran
Seminar on Linear Algebra
and its Applications
August 16 - 19 , 2020

انتخاب ویژگی با معیار بیشینه تصویر و کمینه افزونگی[۱]

مهسا ثمره جهانی[۱،*]، غلامرضا آقاملایی[۱]، مهدی افتخاری[۲] و فرید صابری موحد[۳]

[۱]بخش ریاضی محض، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

[۲]دانشکده مهندسی کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

[۳]گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم و فناوری‌های نوین، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، کرمان، ایران

چکیده

در سال های اخیر، حجم داده هایی با ابعاد بالا که، نیاز به استفاده از حجم بیشتری از حافظه دارند افزایش یافته است. از این رو روش‌های کاهش ابعاد جهت آنالیز داده‌های ابعاد بالا مورد استفاده قرار گرفت تا توسط آن اطلاعات ارزشمند داده‌ها استخراج شود. در این مقاله، با استفاده از تکنیک بهره اطلاعاتی (IG) الگوریتم حریصانه بهبود یافته است.

واژه‌های کلیدی: انتخاب ویژگی، تصویرهای متعامد، افزونگی، داده های با ابعاد بالا

کد موضوع‌بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 15A18، 15A60، 62H30

۱ مقدمه

در بسیاری از برنامه های کاربردی مانند بینایی ماشین و پردازش تصویر داده های با ابعاد بزرگ رایج می باشند، از طرفی داده‌های باابعاد بالا به زمان و فضای بیشتری برای محاسبات نیاز دارند. بنابراین چگونگی کاهش ابعاد داده یک مساله مهم و چالش برانگیز است. اگر تعداد ویژگی های داده مورد بررسی d باشد، یک مساله انتخاب ویژگی به انتخاب k تا از d ویژگی گفته می‌شود بطوری‌که $k \ll d$. به عنوان یک تکنیک موثر برای کاهش بعد، انتخاب ویژگی به جستجوی یک زیر مجموعه کوچکی از ویژگی ها با معیار خاصی می‌پردازد. بطوریکه بیشترین اطلاعات مرتبط حفظ شود، در حقیقت انتخاب ویژگی علاوه بر کاهش تعداد ویژگی‌ها و کارآمد تر کردن الگوریتم، عملکرد الگوریتم را بهبود می بخشد. در طی سال های گذشته، تکنیک های مختلفی برای توصیف انتخاب ویژگی ها ارایه شده است. به عنوان نمونه‌ای کارآمد می توان از روش به دست آوردن اطلاعات (IG) نام برد، که یک روش ارزیابی می باشد، همچنین کاربردهای گسترده ای را در زمینه انتخاب ویژگی پیدا کرده است. [۲،۴] در واقع روش (IG) به عنوان یک فیلتر یک متغیره عمل می کند، به عنوان نمونه ای دیگر می توان به روش مبتنی بر فاکتور ماتریس اشاره کرد. در [۳] وانگ و همکاران ، روش انتخاب ویژگی بدون نظارت را از طریق فاکتور سازی ماتریس $(MFFS)$ ارایه کرده اند. در [۱] یک روش انتخاب ویژگی از طریق بیشنیه تصویر و کمینه افزونگی $(MPMR)$ معرفی شده است، به گونه ای که می توان ویژگی های غیر زاید را از کل مجموعه ویژگی ها پیدا کرد. در این مقاله ، با انگیزه از ایده ی $(MPMR)$ برای از بین بردن ویژگی های زاید، ما با بهره گیری از روش IG ، الگوریتم حریصانه $(GMPMR)$ را بهبود بخشیده ایم.

۲ معرفی نماد ها و مفاهیم اولیه

در سرتاسر این مقاله $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d] \in \mathbb{R}^{n\times d}$ ، ماتریس داده های مرتبط با مجموعه ویژگی اصلی است، که در آن n تعداد نمونه ها و d تعداد ویژگی ها می باشد، همچنین X_I ماتریس $n \times k$ می باشد که I ، مجموعه اندیس ویژگی ها و $|I|$ تعداد عناصر موجود در I و k تعداد ویژگی های انتخاب شده می باشد.

[۱]تقدیم به شادروانان علیرضا افضلی پور و فاخره صبا، بنیانگذاران دانشگاه کرمان

*سخنران. آدرس ایمیل: mahsa.samareh1990@gmail.com

تعریف ۱.۲. عملگر خطی P از $\mathbb{C}^n$ به $\mathbb{C}^n$ یک عملگر تصویر نامیده می‌شود هرگاه خودتوان باشد، یعنی $P^2 = P$.

تعریف ۲.۲. اگر P یک عملگر تصویر باشد و $\mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Im}(P)^\perp$ باشد، عملگر تصویر را متعامد گویند. درصورتی که عملگر تصویر متعامد نباشد، مورب نامیده می‌شود.

ملاحظه ۳.۲. فرض کنید P یک عملگر تصویر باشد، می‌دانیم $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$. پس برای هر عضو دلخواهی مانند x که در $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیریم می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$x = Px + x - Px$$

واضح است که، Px عضوی از $\mathrm{Im}(P)$ و $x - Px$ عضوی از $\mathrm{Ker}(P)$ می‌باشد. به عبارت دیگر، $x - Px$ بر $\mathrm{Ker}(P)^\perp$ عمود است.

با توجه به نکته‌ی ذکر شده، برای به دست آوردن عملگر تصویر حالت زیر را در نظر می‌گیریم: فرض کنید P عملگر تصویر متعامد و $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$ پایه‌ای برای $\mathrm{Im}(P)$ باشد، که بعد $\mathrm{Im}(P) = k$ است. با توجه به نکته‌ی بالا می‌دانیم Px عضوی از $\mathrm{Im}(P)$ می‌باشد پس، ضرایب $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ وجود دارند به طوری‌که،

$$Px = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = V\alpha.$$

از آن‌جایی‌که بردار $x - Px$ بر فضای $\mathrm{Im}(P)$ عمود می‌باشد. بنابراین، بر تک تک پایه‌های $\mathrm{Im}(P)$ عمود است. و به ازای هر $i = 1, \ldots, k$ خواهیم داشت:

$$\langle x - Px, v_i \rangle = 0,$$

حال داریم:

$$v_i^T(x - Px) = 0,$$
$$v_i^T(x - V\alpha) = 0.$$

لازم به ذکر است، روابط بالا به ازای $i = 1, \ldots, k$ برقرار می‌باشند. حال رابطه‌ی بالا را به فرم زیر گسترش می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} v_1^T(x - V\alpha) \\ v_2^T(x - V\alpha) \\ \vdots \\ v_k^T(x - V\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

که، آن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_k^T \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_k^T \end{bmatrix} V\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

در ادامه، نتیجه می‌گیریم:

$$V^T x - V^T V\alpha = 0.$$

از آن‌جایی‌که ستون‌های ماتریس V مستقل خطی هستند، ماتریس V^TV متقارن معین مثبت است. بنابراین، ماتریس V^TV معکوس پذیر می‌باشد. پس مقدار α به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\alpha = (V^TV)^{-1}V^Tx.$$

از طرفی $Px = V\alpha$ می‌باشد. حال با جانشینی α در این رابطه داریم:

$$Px = V(V^TV)^{-1}V^Tx,$$

در نهایت، عملگر تصویر ما در صورتی‌که تصویر متعامد باشد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P = V(V^TV)^{-1}V^T.$$

۳ بررسی و کاربرد افزونگی

هدف از بیان مفهوم افزونگی دستیابی به بردارهای مستقل از طریق حذف ویژگی های زاید است، اهمیت این مفهوم در داده های با تعداد ویژگی های زیاد نمود پیدا میکند و هدف حذف ویژگی هایی است که کمترین تاثیر را در نتیجه نهایی داشته باشند. نرخ افزونگی یک زیرمجموعه ویژگی F_I به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$RED(I) = \frac{1}{k^2} \sum_{i,j \in I} \rho(i,j),$$

که $|I| = k$ و $\rho(i,j)$ ضریب همبستگی پیرسون[1] بین دو ویژگی f_i و f_j می‌باشد. یعنی داریم:

$$\rho(i,j) = \frac{cov(f_i, f_j)}{\sqrt{D(f_i)D(f_j)}},$$

که در آن $cov(f_i, f_j)$ کوواریانس ویژگی‌های f_i و f_j می‌باشد، $D(f_i)$ و $D(f_j)$ به ترتیب مشتقات f_i و f_j، می‌باشند. اگر داده‌ها را از قبل فرمول‌بندی کنیم، آنگاه ضریب همبستگی پیرسون به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\rho(i,j) = cov(f_i, f_j).$$

در اینجا، کوواریانس بین دو ویژگی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$cov(f_i, f_j) = \langle f_i, f_j \rangle = f_i^T f_j.$$

توجه داشته باشید در تعریف نرخ افزونگی که در بالا ارائه شد فرض می‌کنیم که همه‌ی ویژگی‌ها توزیع نرمال را دنبال می‌کنند. به صورت همزمان، این تعریف همچنین یکنواختی تابع بهینه سازی هدف را تضمین می‌کند. معیار انتخاب ویژگی براساس ماتریس‌های تصویر بیشتر روی تمام خواص زیرمجموعه‌های ویژگی انتخاب شده تمرکز می‌کند، و افزونگی میان ویژگی‌ها را در نظر نمی‌گیرد. از این‌رو برای حفظ فضای ویژگی تقریباً خوب و همچنین کمترین افزونگی یک عبارت اضافی افزوده می‌شود. بنابراین، مسئله‌ی انتخاب ویژگی به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\|X - P^I X\|_F^2 + \alpha RED(I),$$

ما یک ماتریس صفر و یک را برای جایگزینی زیرمجموعه‌ی شاخص از ویژگی‌های انتخاب شده تعریف می‌کنیم. بدون از دست دادن کلیت، می‌توان یک ماتریس نشانگر $W \in \mathbb{R}^{d \times |I|}$ از مجموعه اندیس I تعریف کرد که به فرم زیر می‌باشد:

$$W_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{باشد i ،I امین عنصر j} \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

در ماتریس نشانگر تعداد سطرها برابر تعداد کل ویژگی‌ها، و تعداد ستون‌ها ویژگی‌های انتخاب شده می‌باشد.

قضیه ۱.۳. *فرض کنید I_1 و I_2 دو مجموعه اندیس از ویژگی‌ها باشند که I_1 زیرمجموعه‌ای از I_2 می‌باشد. اگر P_1 و P_2 تصاویر متعامدی از زیرفضای ویژگی باشند که با مجموعه اندیس I_1 و I_2 نشان داده شده، سپس:*

$$\|X - P_2 X\|_F \leq \|X - P_1 X\|_F.$$

اثبات. می‌دانیم که به ازای هر $H \in \mathbb{R}^{k \times d}$ رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\|X - P_2 X\|_F^2 = \min \|X - X_2 H\|_F^2.$$

پس می‌توان نامساوی زیر را نتیجه گرفت:

$$\|X - P_2 X\|_F^2 \leq \|X - X_2 H\|_F^2, \qquad (۱)$$

[1] Pearson correlation

که به ازای هر $H \in \mathbb{R}^{k\times d}$ برقرار است. کافی است نشان دهیم $X_2H = P_1X$ جاییکه $P_1 = X_1(X_1^TX_1)-1X_1^T$ به عبارت دیگر $X_2H = X_1(X_1^TX_1)^{-1}X_1^TX$ از طرفی چون I_1 زیر مجموعه I_2 میباشد پس می توان گفت $X_1 = X_2W$ بنابراین کافی است H را به صورت $W(X_1^TX_1)^{-1}X_1^TX$ در نظر گرفت، پس داریم

$$\|X - P_2X\|_F \leq \|X - X_2H\|_F = \|X - X_2W(X_1^TX_1)^{-1}X_1^TX\|_F,$$

بنابراین

$$\|X - P_2X\|_F \leq \|X - P_1X\|_F. \qquad \square$$

۴ نتایج اصلی

در زمان های اخیر، مفهوم بیشینه تصویر و کمینه افزونگی $(MPMR)$ توسط یانگ و همکاران معرفی شده است، در این بخش ابتدا ساخت یک الگوریتم حریصانه انتخاب ویژگی بدون نظارت $(GMPMR)$ آورده شده است، سپس جزییات انتخاب ویژگی پیشنهادی از طریق IG و با استفاده از خواص تصویر متعامد شرح داده شده است.

الگوریتم GMPMR

الگوریتم ۱.۴. ۱. ورودی: X و k

۲. خروجی I

۳. محاسبه کن IG

۴. $I = argmin\|X - x_i(x_i^Tx_i)^{-1}x_i^TX\|_F$

۵. برای $i = 2,\ldots,k$ انجام دهید $I = I \cup \{j\}$ $j = argmax\|Y_i\|_2$ پایان حلقه

در سال های اخیر روش های انتخاب ویژگی برای مجموعه داده‌ها پیشنهاد شده است، در این مقاله الگوریتم $GMPMR$ با بهره گیری از روش IG را بهبود بخشیده ایم، در واقع فضای تولید شده توسط ماتریس داده را فضای اصلی می نامیم و به عنوان اولین گام در مرحله اول فضای تولید شده توسط ویژگی اول را در نظر گرفته و فاصله آن را با فضای اصلی به دست می آوریم، در مرحله بعد فاصله میان فضای تولید شده توسط ویژگی دوم و فضای اصلی را به دست می آوریم. این روند تا d مرحله انجام می دهیم، در انتها ویژگی انتخاب می شود که فضای تولید شده توسط آن کمترین فاصله را با فضای اصلی داشته باشد، سعی می شود بردار ها به گونه ای انتخاب شوند که در تعامد با یکدیگر باشند و هر چه خطای باقی مانده بیشتر باشد تعامد میان ویژگی ها آشکارتر است.

الگوریتم MPMRing

الگوریتم ۲.۴. ۱. ورودی: X و k

۲. خروجی I

۳. محاسبه کن IG

۴. $I = argmin\|X - x_i(x_i^Tx_i)^{-1}x_i^TX\|_F$

۵. برای $i = 2,\ldots,k$ انجام دهید $I = I \cup \{j\}$ $j = argmax\sqrt{\|Y_iIG\|_2}$ پایان حلقه

۵ نتایج تجربی

برای بررسی دقت الگوریتم پیشنهادی، آزمایش را بر روی چهار مجموعه داده انجام دادیم، مجموعه داده ها از زمینه های مختلف به عنوان یک آزمایش خوب برای ارزیابی روش های مختلف انتخاب ویژگی به کار می رود، همانگونه که در نمودار زیر نشان داده شده است الگوریتم پیشنهادی بهبود یافته نسبت به الگوریتم $(GMPMR)$ دارای دقت بالاتری می باشد. برخی از مهمترین پارامترهای بررسی شده در مسائل طبقه‌بندی به شرح زیر می‌باشند:

- قدرت تعمیم‌دهی[۱] = زیرمجموعه انتخاب شده برای طبقه‌بندی‌های متفاوت چقدر کارآمد است (صرفاً برای یک طبقه‌بند مفید نباشد). =
- دقت[۲] = زیرمجموعه انتخاب شده به چه میزان برای پیش بینی دقت دارد.
- نرخ مثبت درست[۳] (TPR) این نرخ با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌شود. با استفاده از این نرخ می‌توان عملکرد مدل مربوطه را در پیش‌بینی کلاس‌های مثبت ارزیابی کرد. بدیهی است چنان‌چه جواب ۱ به دست آید یعنی مدل به خوبی توانسته کلاس‌های مثبت را پیش‌بینی کند.

$$\mathrm{TPR} = \frac{\mathrm{TP}}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{TP}}{\mathrm{TP} + \mathrm{FN}}$$

- نرخ منفی درست[۴] (TNR) این نرخ از طریق فرمول زیر محاسبه می‌شود. با استفاده از این نرخ می‌توان عملکرد مدل مربوطه را در پیش‌بینی کلاس‌های منفی ارزیابی کرد. بدیهی است که بالا بودن نرخ منفی درست، نشان از خوب بودن مدل می‌باشد.

$$\mathrm{TNR} = \frac{\mathrm{TN}}{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{TN}}{\mathrm{TN} + \mathrm{FP}}$$

- میانگین هندسی[۵] (Gmean) = تعادل را بین نرخ منفی درست و نرخ مثبت درست، برقرار می‌کند. یعنی،

$$\mathrm{Gmean} = \sqrt{\mathrm{TPR}} \times \sqrt{\mathrm{TNR}}$$

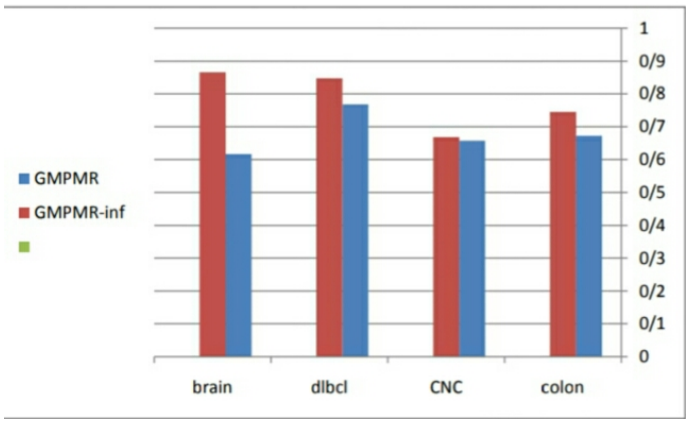
جدول ۱: چهار مجموعه داده که در آزمایشات مورد استفاده قرار گرفته است

DLBCL	Colon	CNS	Brain	
۴۷	۶۲	۶۰	۲۱	**Samples #**
۴۰۲۶	۲۰۰۰	۷۱۲۹	۱۲۶۲۵	**Features #**

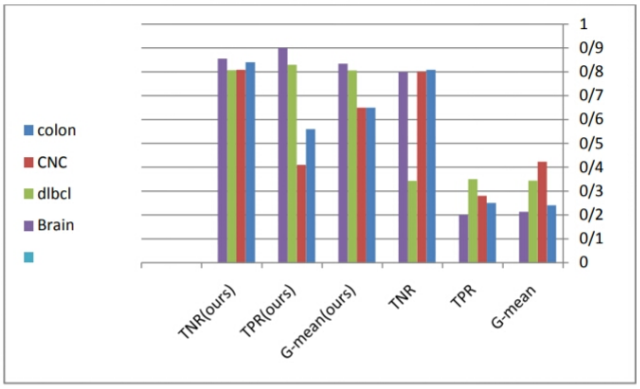
۶ نتیجه‌گیری

با توجه به اینکه داده هایی با ابعاد بالا به فضا و زمان بیشتری برای محاسبات نیاز دارند در اینجا با استفاده از خواص تصویر متعامد یک الگوریتم بهبود یافته حریصانه برای انتخاب ویژگی با بهره گیری از روش IG پیشنهاد شد، بطوری که حفظ بیشترین اطلاعات مرتبط و دقت بالاتر و سرعت بیشتر از اهداف آن با توجه به الگوریتم حریصانه $GMPMR$ ، می باشد

[1] Ability of generalization
[2] Accuracy
[3] True positive rate
[4] True negative rate
[5] Geometric mean



شکل ۱: دقت آزمایشات انجام شده بر روی داده ها توسط الگوریتم ها



شکل ۲: مقایسه نرخ مثبت و منفی و میانگین هندسی مجموعه داده ها

مراجع

[1] S. Wang, W. Pedrycz, Q. Zhu and W. Zhu, Unsupervised feature selection via maximum projection and minimum redundancy, Knowl.-Based Syst., 75 (2015), 19–29.

[2] V. Bolón-Canedo, N. Sánchez-Marono, A. Alonso-Betanzos, J.M. Benítez and F. Herrera, A review of microarray datasets and applied feature selection methods, Inf. Sci., 282 (2014), 111–135.

[3] S. Wang, W. Pedrycz, Q. Zhu and W. Zhu, Subspace learning for unsupervised feature selection via matrix factorization, Pattern Recognit., 48 (2015), 10–19.

[4] M.K. Ebrahimpour, M. Zare, M. Eftekhari and G. Aghamolaei, Occam's razor in dimension reduction: Using reduced row Echelon form for finding linear independent features in high dimensional microarray datasets, Eng. Appl. Artif. Intell., 62 (2017), 214–221.

دانشگاه شهید باهنر کرمان، ایران
دهمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن
۲۶ لغایت ۲۹ مرداد ۱۳۹۹
Shahid Bahonar University of Kerman, Iran
Seminar on Linear Algebra and its Applications
August 16 - 19 , 2020

مساله مقدار ویژه معکوس مرتبه دوم برای ماتریس پیکانی[۱]

محمد حیدری، سیدابوالفضل شاهزاده فاضلی* و ندا اسحاقی

گروه علوم کامپیوتر، دانشگاه یزد، یزد

چکیده

به ساخت یک ماتریس با ساختاری مشخص با استفاده از اطلاعات طیفی آن، مساله مقدار ویژه معکوس گفته می‌شود که کاربردهای فراوانی در علوم و مهندسی دارد. در این مقاله به یک مساله مقدار ویژه معکوس مرتبه دوم پرداخته شده است. مساله مذکور، QBD نامیده شده و معطوف به ساخت ماتریس پیکانی با استفاده از چهار زوج ویژه است. شرایط لازم و کافی وجود جواب یکتا و جواب مساله بدست آمده است. در نهایت مثالی عددی ارایه گردیده است.

واژه‌های کلیدی: مساله مقدار ویژه معکوس مرتبه دوم، ماتریس پیکانی، زوج ویژه

کد موضوع‌بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 65F18، 65F15

۱ مقدمه

به فرایند ساخت یک ماتریس با ساختاری مشخص با استفاده از اطلاعات طیفی آن یک مساله مقدار ویژه معکوس گفته می‌شود. مسایل مقدار ویژه معکوس از جمله مسایل اساسی در مسایل معکوس هستند. در بسیاری از کاربردها در علوم، یک سیستم به شکل ماتریسی مدل‌سازی می‌شود و بدیهی است که بسیاری از ویژگی‌های ذاتی سیستم، در اطلاعات طیفی ماتریس متناظر نهفته است و این اطلاعات برای تخمین و یا پیش‌بینی رفتار سیستم مفید هستند. در نتیجه، اگر با دانستن اطلاعات طیفی بتوان مدل ماتریسی سیستم را ساخت، بدین معناست که سیستمی که برخی ویژگی‌های مطلوب و مورد نظر را داراست، ساخته شده است، بنابراین یک مساله معکوس حل شده است.

معادله خطی دیفرانسیل مرتبه دوم

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + K = f(t), \qquad (۱)$$

را در نظر بگیرید به طوری که ضرایب M, C و K ماتریس‌های $n \times n$ و $f(t)$ یک بردار با مرتبه n است. این یک معادله اساسی در بسیاری از کاربردهای مهندسی است. دو حوزه بسیاری مهمی که این معادله در آن صادق است، سیستم‌های مکانیکی و نوسانات الکتریکی می‌باشد که تیسر و دیگران در [۵] پژوهش بسیار خوبی روی این موضوع داشته‌اند. حالت خاصی از معادله (۱) ، شکل همگن آن است که اهمیت زیادی در سیستم‌های جرم-فنر، فرود هواپیما، سیستم‌های نوسان‌گر و غیره دارد. بسیار مشهور است که جواب معادله ماتریسی

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + K = 0, \qquad (۲)$$

را می‌توان به صورت

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0 \qquad (۳)$$

[۱] تقدیم به شادروانان علیرضا افضلی پور و فاخره صبا، بنیانگذاران دانشگاه کرمان

* سخنران. آدرس ایمیل: fazeli@yazd.ac.ir

نوشت به طوری که λ یک اسکالر و x یک بردار است. این معادله همگن کاربردهای فراوانی [۱، ۶] دارد. این مساله، مساله مقدار ویژه مرتبه دوم[1] نامیده می‌شود. در QEP با مفروض بودن ماتریس‌های مختلط M, C و K و معادله ماتریسی (۳) ، می‌بایست اسکالرهای λ و بردارهای ناصفر x پیدا شوند به طوری که (۳) برقرار باشد. اسکالرهای λ متناظر با xهایی که در (۳) صدق می‌کنند به ترتیب مقدار ویژه و بردار ویژه چندجمله‌ای ماتریسی مرتبه دوم

$$Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K$$

نامیده می‌شوند. این حقیقت، باعث شده است تا محققان زیادی به حل رابطه (۳) برای انواع ماتریس‌ها با اطلاعات طیفی متفاوت بپردازند. یکی از تفاوت‌های اصلی مساله مقدار ویژه معکوس استاندارد

$$Ax = \lambda x$$

و QEP این است که تعداد مقادیر ویژه QEP برابر $2n$ است.

معکوس QEP که مساله مقدار ویژه معکوس مرتبه دوم [2] نامیده می‌شود، به اندازه خود QEP دارای اهمیت است و در حل بسیاری از مسایل در حوزه‌های گوناگونی از علوم و مهندسی بکار گرفته شده است. مسایل QIEP معطوف به ساخت ماتریس‌های M, C و K با ساختاری مشخص هستند به طوری که اطلاعات طیفی داده شده در (۳) صدق کند.

مطالعاتی فراوانی روی QIEP انجام شده است. نات داتا و دیگران در [۴] مساله مقدار ویژه معکوس مرتبه دوم آفین را برای سیستم جرم-فنر مطالعه کردند. آن‌ها ماتریس‌های M, Cو K را به عنوان توابع خطی در نظر گرفتند. سیستمی که آن‌ها مطالعه کردند این محدودیت را داشت که M ماتریسی قطری و KوC ژاکوبی باشند و همچنین این ماتریس‌ها می‌بایست ترکیبی خطی از زیرساختارهای خود باشند. فنگ و دیگران در [۱] یک مساله مقدار ویژه معکوس مرتبه دوم جزیی توصیف شده را مطالعه کردند. برای $m, n < m < 2n$ زوج‌ویژه داده شده، آن‌ها جواب ماتریس‌های نامنفی، مرتبه کامل و حالت پارامتربندی شده را بررسی کردند. یانگ‌جین و دیگران در سال ۲۰۱۱ در [۶] دو مساله مقدار ویژه معکوس مرتبه دوم مونیک متفاوت را مطالعه کردند. آن‌ها مداد $Q(\lambda) = I_n\lambda^2 + \lambda C + K$ را به عنوان مداد مونیک مرتبه دوم[3] معرفی کردند و حالتی را بررسی نمودند که ماتریس‌های C و K به ترتیب پاد-تقارن و متقارن باشند. ماتریس $\hat{Q}(\lambda)$ ماتریس حاصل از حذف آخرین سطر و ستون $Q(\lambda)$ است. در این مقاله یک مساله مقدار ویژه معکوس مرتبه دوم متناظر با ماتریس پیکانی که در بخش بعد معرفی شده است مورد مطالعه قرار خواهد گرفت.

۱.۱ پیش‌نیازها و بیان مساله

یک ماتریس متقارن پیکانی با اندازه $n \times n$ به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & b_n \\ b_2 & a_2 & & & & \\ b_3 & & a_3 & & & \\ b_4 & & & a_4 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ b_n & & & & & a_n \end{bmatrix}. \qquad (۴)$$

تعریف ۱.۱. [۲] ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ مفروض است. شکل شبه‌معکوس مور-پنروس[4] ماتریس A که با $A^\dagger \in \mathbb{R}^{n\times m}$ نشان داده می‌شود، ماتریسی است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

- $AA^\dagger A = A$
- $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$
- $(AA^\dagger)^T = AA^\dagger$

[1] Quadratic eigenvalue problem (QEP)
[2] Quadratic inverse eigenvalue problem (QIEP)
[3] Quadratic Monic Pencil
[4] Moore-Penrose Pseudoinverse

- $(A^\dagger A)^T = A^\dagger A$

در این مقاله، یک مساله مقدار ویژه معکوس مرتبه دوم متناظر با ماتریس پیکانی با استفاده از چهار زوج ویژه مورد مطالعه قرار گرفته است. این مساله که QBD نامیده می‌شود در زیر تعریف شده است. نات داتا در [۳] نشان داده است که این مساله مقدار ویژه معکوس مرتبه دوم برای ماتریس پیکانی در سیستم فرود هواپیما کاربرد دارد.

مساله QBD: چهار زوج‌ویژه $\{\lambda_i, v^{(i)}\}_{i=1}^4, \lambda_i \in \mathbb{R}, v^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ داده شده است، ماتریس‌های پیکانی متقارن C و K را بسازید به طوری که در چند جمله‌ای ماتریسی

$$Q(\lambda) = I_n\lambda^2 + C\lambda + K$$

رابطه زیر برقرار باشد:

$$Q(\lambda_i)v^{(i)} = \vec{0}, i = 1, 2, 3, 4. \tag{۵}$$

۲ نتایج اصلی

در این قسمت، به حل مساله QBD پرداخته می‌شود. درایه‌های ماتریس‌های مجهول به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$C = \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ b_2 & a_2 & & & \\ b_3 & & a_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b_n & & & & a_n \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} c_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_n \\ d_2 & c_2 & & & \\ d_3 & & c_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ d_n & & & & c_n \end{bmatrix}. \tag{۶}$$

رابطه (۵) را می‌توان به صورت دستگاهی با $4n$ معادله حقیقی به صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{cases} (\lambda_1^2 + \lambda_1 a_1 + c_1)v_1^{(1)} + \sum_{j=2}^n (\lambda_1 b_j + d_j)v_j^{(1)} = 0, \\ (\lambda_2^2 + \lambda_2 a_1 + c_1)v_1^{(2)} + \sum_{j=2}^n (\lambda_2 b_j + d_j)v_j^{(2)} = 0, \\ (\lambda_3^2 + \lambda_3 a_1 + c_1)v_1^{(3)} + \sum_{j=2}^n (\lambda_3 b_j + d_j)v_j^{(3)} = 0, \\ (\lambda_4^2 + \lambda_4 a_1 + c_1)v_1^{(4)} + \sum_{j=2}^n (\lambda_4 b_j + d_j)v_j^{(4)} = 0, \end{cases} \tag{۷}$$

و برای $j = 2, 3, \cdots, n$

$$\begin{cases} (\lambda_1 b_j + d_j)v_1^{(1)} + (\lambda_1^2 + \lambda_1 a_j + c_j)v_j^{(1)} = 0, \\ (\lambda_2 b_j + d_j)v_1^{(2)} + (\lambda_2^2 + \lambda_2 a_j + c_j)v_j^{(2)} = 0, \\ (\lambda_3 b_j + d_j)v_1^{(3)} + (\lambda_3^2 + \lambda_3 a_j + c_j)v_j^{(3)} = 0, \\ (\lambda_4 b_j + d_j)v_1^{(4)} + (\lambda_4^2 + \lambda_4 a_j + c_j)v_j^{(4)} = 0. \end{cases} \tag{۸}$$

برای حل مساله قرار می‌دهیم:

$$g = \begin{bmatrix} g^{(1)} \\ g^{(2)} \\ g^{(3)} \\ \vdots \\ g^{(n)} \end{bmatrix}, g^{(i)} = \begin{bmatrix} -\lambda_1^2 v_i^{(1)} \\ -\lambda_2^2 v_i^{(2)} \\ -\lambda_3^2 v_i^{(3)} \\ -\lambda_4^2 v_i^{(4)} \end{bmatrix} i \geq 1, y = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ y^{(3)} \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{bmatrix}, y^{(1)} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} y^{(i)} = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \end{bmatrix}, i \geq 2.$$

$$A_{1,1}=\begin{bmatrix}\lambda_1 v_1^{(1)} & 0 & v_1^{(1)} & 0\\ \lambda_2 v_1^{(2)} & 0 & v_1^{(2)} & 0\\ \lambda_3 v_1^{(3)} & 0 & v_1^{(3)} & 0\\ \lambda_4 v_1^{(4)} & 0 & v_1^{(4)} & 0\end{bmatrix}, A_{j,j}=\begin{bmatrix}\lambda_1 v_j^{(1)} & \lambda_1 v_1^{(1)} & v_j^{(1)} & v_1^{(1)}\\ \lambda_2 v_j^{(2)} & \lambda_2 v_1^{(2)} & v_j^{(2)} & v_1^{(2)}\\ \lambda_3 v_j^{(3)} & \lambda_3 v_1^{(3)} & v_j^{(3)} & v_1^{(3)}\\ \lambda_4 v_j^{(4)} & \lambda_4 v_1^{(4)} & v_j^{(4)} & v_1^{(4)}\end{bmatrix}, j\geq 2.$$

$$B_{j,j}=\begin{bmatrix}0 & \lambda_1 v_j^{(1)} & 0 & v_j^{(1)}\\ 0 & \lambda_2 v_j^{(2)} & 0 & v_j^{(2)}\\ 0 & \lambda_3 v_j^{(3)} & 0 & v_j^{(3)}\\ 0 & \lambda_4 v_j^{(4)} & 0 & v_j^{(4)}\end{bmatrix}, j\geq 2, A=\begin{bmatrix}A_{1,1} & B_{2,2} & B_{3,3} & \cdots & B_{n,n}\\ & A_{2,2} & & & \\ & & A_{3,3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_{n,n}\end{bmatrix}.$$

حال می‌توان روابط (۷) و (۸) را به صورت دستگاه خطی زیر بازنویسی کرد:

$$Ay=g. \tag{۹}$$

بنابراین حل مساله QBD معادل حل دستگاه (۹) است.

قضیه ۱.۲. *مساله QBD جواب یکتا دارد اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشند:*

- $rank(A_{i,i}) = rank([A_{i,i}, g^{(i)}]), i = 2, 3, \cdots, n$
- $det(A_{i,i}) \neq 0, i = 2, 3, \cdots, n$
- $rank(A_{1,1}) = rank([A_{1,1}, g^{(1)} - \sum_{i=2}^{n} B_{i,i} y^{(i)}])$

اثبات. ابتدا دستگاه (۸) بررسی می‌شود. این دستگاه جواب یکتا دارد اگر و تنها اگر رتبه ماتریس ضرایب با رتبه ماتریس افزوده برابر باشد و شرط دوم برقرار باشد. یعنی:

$$\text{rank}(A_{i,i}) = \text{rank}([A_{i,i}, g^{(i)}]), i = 2, 3, \cdots, n.$$

اما برای دستگاه (۷) دو مجهول a_1 و c_1 و چهار معادله داریم. بجز ضرایب a_1 و c_1 باقی عبارات را به عنوان ثابت به سمت راست معادله منتقل می‌شوند یعنی:

$$\begin{cases}\lambda_1 a_1 v_1^{(1)} + c_1 v_1^{(1)} &= -(\lambda_1^2 v_1^{(1)} + \sum_{j=2}^{n}(\lambda_1 b_j + d_j) v_j^{(1)})\\ \lambda_2 a_1 v_1^{(2)} + c_1 v_1^{(2)} &= -(\lambda_2^2 v_1^{(2)} + \sum_{j=2}^{n}(\lambda_2 b_j + d_j) v_j^{(2)})\\ \lambda_3 a_1 v_1^{(3)} + c_1 v_1^{(3)} &= -(\lambda_3^2 v_1^{(3)} + \sum_{j=2}^{n}(\lambda_3 b_j + d_j) v_j^{(3)})\\ \lambda_4 a_1 v_1^{(4)} + c_1 v_1^{(4)} &= -(\lambda_4^2 v_1^{(4)} + \sum_{j=2}^{n}(\lambda_4 b_j + d_j) v_j^{(4)})\end{cases}$$

در نتیجه

$$A_{1,1} y^{(1)} = -(-g^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} B_{j,j} y^{(j)}),$$

که وجود جواب یکتا تضمین می‌شود اگر و تنها اگر

$$\text{rank}(A_{1,1}) = \text{rank}([A_{1,1}, g^{(1)} - \sum_{j=2}^{n} B_{j,j} y^{(j)})]).$$

□

با استفاده از شبه‌معکوس مور-پنروس جواب QBD به صورت زیر است:

$$y^{(i)} = A_{i,i}^{\dagger} g^{(i)}, \tag{۱۰}$$

$$y^{(1)} = A_{1,1}^{\dagger}(g^{(1)} - \sum_{i=2}^{n} B_{i,i} y^{(i)}). \tag{۱۱}$$

ملاحظه ۲.۲. اگر شرایط قضیه ۱.۲ برقرار نباشد، این امکان وجود دارد تا جوابی تقریبی برای مساله بدست آید.

۳ مثال عددی

در این قسمت یک مثال عددی با جواب تقریبی برای آزمایش روش پیشنهادی ارایه می‌شود.

مثال ۱.۳. چهار زوج‌ویژه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 4,\\
&v_1 = [2, -3, 2, 1, 3]^T,\\
&v_2 = [3, 1, -1, 2, 5]^T,\\
&v_3 = [2, 4, 1, -3, 1]^T,\\
&v_4 = [6, 3, 4, 2, 4]^T.
\end{aligned}$$

حال با استفاده از روابط (۱۰) و (۱۱) جواب تقریبی به صورت زیر است:

$$C = \begin{bmatrix}
4.1861 & -2.4412 & -4.2439 & -0.4220 & -3.8324\\
-2.4412 & -2.4118 & & & \\
-4.2439 & & 2.6585 & & \\
-0.4220 & & & -0.5046 & \\
-3.8324 & & & & 1.5140
\end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix}
-20.9553 & 7.0294 & 12.0000 & -2.2202 & 8.4246\\
7.0294 & -0.8824 & & & \\
12.0000 & & -19.1707 & & \\
-2.2202 & & & -2.2569 & \\
8.4246 & & & & -11.6983
\end{bmatrix}.$$

حال چندجمله‌ای ماتریسی هر یک از این زوج‌های ویژه را بدست می‌آوریم تا شرایط QBD بررسی شود.

$$Q(\lambda_1) = \begin{bmatrix}
-25.3274 & 11.9118 & 20.4878 & -1.3761 & 16.0894\\
11.9118 & 7.9412 & & & \\
20.4878 & & -20.4878 & & \\
-1.3761 & & & 2.7523 & \\
16.0894 & & & & -10.7263
\end{bmatrix},$$

$$Q(\lambda_2) = \begin{bmatrix}
0.6029 & -0.2941 & -0.7317 & -3.4862 & -3.0726\\
11.9118 & 0.8824 & & & \\
-0.7317 & & -2.1951 & & \\
-3.4862 & & & 5.2294 & \\
-3.0726 & & & & 1.8436
\end{bmatrix},$$

$$Q(\lambda_3) = \begin{bmatrix} -15.7692 & 4.5882 & 7.7561 & -2.6422 & 4.5922 \\ 11.9118 & -2.2941 & & & \\ 4.5882 & & -15.5122 & & \\ -2.6422 & & & -1.7615 & \\ 4.5922 & & & & -9.1844 \end{bmatrix},$$

$$Q(\lambda_4) = \begin{bmatrix} 11.7890 & -2.7353 & -4.9756 & -3.9083 & -6.9050 \\ -2.7353 & 5.4706 & & & \\ -4.9756 & & 7.4634 & & \\ -3.9083 & & & 11.7248 & \\ -6.9050 & & & & 10.3575 \end{bmatrix}.$$

داریم:

$$\begin{aligned} Q(\lambda_1)v_1^T &= \begin{bmatrix} 1.4776 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}^T, \\ Q(\lambda_2)v_2^T &= \begin{bmatrix} -20.0892 & 0.0000 & 0.0000 & 0.000 & 0.0000 \end{bmatrix}^T, \\ Q(\lambda_3)v_3^T &= \begin{bmatrix} 7.0894 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}^T, \\ Q(\lambda_4)v_4^T &= \begin{bmatrix} 7.1889 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

۴ نتیجه‌گیری

در این مقاله یک مساله مقدار ویژه معکوس مرتبه دوم حل شد. مساله معطوف به ساخت جمله‌ای ماتریسی همگن مرتبه دوم است به طوری که ماتریس‌های مجهول از نوع پیکانی باشند. در حل مساله از شکل شبه‌معکوس مور–پنروس ماتریس استفاده شد که امکان ساخت جواب تقریبی را فراهم می‌کند. شرایط لازم و کافی و جواب مساله بدست آمد و یک مثال عددی برای آزمایش روش پیشنهادی ارایه گردید.

مراجع

[1] Yun-Feng Cai, Yuen-Cheng Kuo, Wen-Wei Lin, Shu-Fang Xu, Solutions to a quadratic inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra and its Applications*, 430 (2009), 1590–1606.

[2] Ben-Israel, Adi, Greville and Thomas N.E, *Generalized Inverses Theory and Application*, Springer-Verlage, New York, 2003.

[3] Biswa Nath Datta, *Numerical Linear Algebra and Applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010.

[4] Biswa Nath Datta, Vadim Sokolov, A solution of the affine quadratic inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra and its Applications*, 434 (2011), 1745–1760.

[5] F. Tisseur, K. Meerbergen, The Quadratic Eigenvalue Problem, *SIAM Review*, 43 (2001), 235–286.

[6] Yongxin Yuan, Hua Dai, Solutions to an inverse monic quadratic eigenvalue problem, *Linear Algebra and its Applications*, 434 (2011), 2367–2381.

دانشگاه شهید باهنر کرمان، ایران
دهمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن
۲۶ لغایت ۲۹ مرداد ۱۳۹۹
10
Shahid Bahonar University of Kerman, Iran
Seminar on Linear Algebra and its Applications
August 16 - 19 , 2020

استفاده از نظریه های آموزش ریاضی در تدریس جبر خطی[۱]

ابوالفضل رفیع پور*
دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

چکیده

در این مقاله پس از بحث در مورد ضرورت توجه به آموزش ریاضی دانشگاهی و به خصوص آموزش جبرخطی؛ برخی از نظریه های آموزش ریاضی که در فرآیند یاددهی-یادگیری آموزش جبرخطی مفید بوده اند، مرور خواهند شد. در این بین نظریه APOS با شرح و بسط بیشتری توضیح داده خواهد شد. به طور مشخص این نظریه به کالبدشکافی فعل و انفعالاتی که در ذهن یادگیرنده در طی فرآیند یادگیری مفاهیم ریاضی رخ می دهد، می پردازد. در ادامه، کاربرد این نظریه برای چند مفهوم ریاضی، به خصوص برای مفهوم مقدار ویژه و بردار ویژه، بیان خواهد شد. در پایان، به کاربردهای عملی حاصل از به کارگیری این نظریه، در بهبود فرآیند یاددهی-یادگیری مفاهیم جبرخطی، اشاره خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: جبرخطی، آموزش ریاضی دانشگاهی، نظریه APOS
کد موضوع‌بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 15A18، 97C30، 97H60

۱ مقدمه

گسترش سریع آموزش عالی در ایران، موجب رشد قابل ملاحظه تعداد دانشجویان در رشته های ریاضی و فنی شده است. دانشجویانی که از مسیر کنکور وارد دانشگاه می شوند. شده اند. کنکوری که روی آموزش ریاضی مدرسه ای و دانشگاهی اثر منفی داشته است، به گونه ای که روند یاددهی-یادگیری ریاضی را مبتنی بر آزمون کرده است. در ادبیات پژوهشی، آموزش آزمون محور غیرعادی است و مانع آموزش درستِ ریاضی در سطح دانشگاه می شود. آزمون کنکور باعث شده تفکر مستقل دانشجویان نابود شود و خلاقیت شان کمتر شود. هم اکنون شاهد آن هستیم که علاقه و اشتیاق دانش آموزان و دانشجویان برای خواندن ریاضی کم و کمتر شده است. این در حالی است که روشهای آموزش ریاضی در سطح دانشگاه تغییر نکرده است. به عنوان یک نتیجه، افت تحصیلی در بین دانشجویان شدیدتر شده است. در گذشته تعداد کمی از علاقمندان به رشته های ریاضی و فنی وارد این رشته ها می شدند و شاید هر نوع روش تدریسی می توانست برای گروه علاقمندان به ریاضی، کارامد باشد. اما با گسترش سریع آموزش عالی و عمومی تر شدن رشته های ریاضی و فنی، مخاطبان درس های ریاضی در دانشگاه تغییر کرده اند و هم اکنون، حوزه پژوهش در آموزش ریاضی دانشگاهی، نیازمند توجه جدی است. به عبارت دیگر، با کاهش جمعیت دانشجویان نخبه در دانشگاه ها، ضرورت توجه به آموزش ریاضی دانشگاهی و انجام پژوهش درباره فرآیند یاددهی-یادگیری ریاضی در سطح دانشگاه، بیشتر شده است. پژوهش در حوزه آموزش ریاضی دانشگاهی که در گذشته تحت عنوان «تفکر ریاضی پیشرفته » نامیده می شد، در بسیاری از کشورهای جهان مورد توجه بوده است. به گفته نردی [۴] پژوهش در زمینه آموزش ریاضی دانشگاهی، پیشرفت های قابل ملاحظه ای داشته است. به گونه ای که در ابتدا تعداد پژوهش های حوزه آموزش ریاضی دانشگاهی، محدود بود و بیشترشان روی جنبه های شناختی متمرکز بودند. اما امروزه پژوهش های این حوزه به سایر جنبه ها مانند جنبه اجتماعی و عاطفی نیز پرداخته اند. مرور ادبیات پژوهشی این حوزه نشان می دهد که اکثر پژوهش های مربوط به حوزه آموزش ریاضی دانشگاهی در زمینه آموزش درس های سرویسی همانند ریاضی عمومی (حسابان)، معادلات دیفرانسیل، و جبرخطی انجام شده اند. تمرکز مقاله حاضر روی فرآیند یاددهی-یادگیری جبرخطی است، چرا که یکی از درس های کلیدی برای اکثر رشته های فنی و مهندسی است و کاربردها فراوانی درصنعت دارد [۶] . رویکرد

[۱] تقدیم به شادروانان علیرضا افضلی پور و فاخره صبا، بنیانگذاران دانشگاه کرمان
* سخنران. آدرس ایمیل: rafiepour@uk.ac.ir

های مختلفی در آموزش ریاضی وجود دارد که برای یاددهی-یادگیری جبرخطی استفاده شده است. به عنوان مثال رویکرد مدلسازی و کاربردها در پژوهش های مختلفی برای ارتقا فرآیند یاددهی-یادگیری ریاضی استفاده شده است [۱، ۳]. همچنین در برخی از پژوهش ها از چارچوب نظری حل مسئله، رهیافت های فراشناختی و رویکرد «یادگیری مبتنی بر جستار » استفاده شده است. اما تمرکز اصلی مقاله حاضر روی نظریه یادگیری APOS است، چراکه بیشترین توجه را در حوزه آموزش جبرخطی به خود جلب کرده است. به طوری که چندین مقاله از ویژه نامه ژورنال آلمانی آموزش ریاضی با موضوع آموزش جبرخطی، که در ماه نوامبر ۲۰۱۹ منتشر شده است، مبتنی بر این نظریه است [۶]. در ادامه، توضیحات بیشتری درباره این نظریه آمده است و مثال های مناسب از کاربرد نظریه APOS برای چند مفهوم ریاضی، بیان خواهد شد.

۲ نظریه APOS

نظریه APOS بیان می دارد که مفاهیم ریاضی چگونه یاد گرفته می شوند. در واقع به عنوان یک چارچوب نظری توضیح می دهد که چگونه فراگیران درکشان را از یک مفهوم ریاضی می سازند. طبق این نظریه مفاهیم ریاضی به طور مستقیم یادگرفته نمی شوند، بلکه در ابتدا ساختارهای مرتبط با آن مفهوم در ذهن فراگیران ساخته می شود. نظریه APOS توسط دوبینسکی و مک دونالد [۳] و بر اساس دیدگاه ساخت و سازگرایی ساخته شده است و به نوعی مبتنی بر نظریه پیاژه است. ساخت و سازگراها معتقدند که فرد خودش سازنده دانش خویش است و نقش معلم به عنوان یاریگر و سهیل گر فرآیند ساختن مفاهیم توسط شاگردان است. این نظریه بر این فرض استوار است که فرد، مفاهیم ریاضی را به طور مستقیم نمی آموزد؛ بلکه او برای معنا بخشیدن به یک مفهوم ریاضی، از ساختارهای ریاضی موجود در ذهن خویش، استفاده می کند. اگر فرد برای یک مفهوم، ساختارهای ذهنی مناسب ریاضی را در اختیار داشته باشد، یادگیری برای او آسان می شود ولی اگر ساختارهای ذهنی مناسبی در ذهن فرد موجود نباشد، یادگیری آن مفهوم ریاضی مشکل خواهد شد. سطوح (ساختارهای ذهنی) نظریه APOS عبارتند از: عمل ، فرایند ، شئ و طرحواره . به عبارت دیگر نظریه APOS با عمل شروع شده، از میان فرایندها حرکت کرده و پس از تبدیل آنها به اشیاء به طرحواره می رسد. در ادامه هر کدام از چهار مولفه عمل، فرآیند، شیء و طرحواره به صورت مفصل تر و همراه با مثال توضیح داده شده است.

- عمل: تغییر دادن اشیاء از پیش شناخته شده توسط فرد، به طوریکه روش این تغییر به یادگیرنده نشان داده شده باشد. بنابراین اگر درک یادگیرنده از یک مفهوم در سطح عمل باشد، تنها می تواند این تغییر را از طریق پاسخ به محرک های بیرونی که جزئیاتی دقیق درباره اینکه چه گامهایی باید برداشته شود، ایجاد کند. در این مرحله، فرد نیاز دارد تا از حافظه اش استفاده کند. به عنوان مثال، فرد می تواند مقدار تابع را در نقطه خاص محاسبه نماید. در این سطح، فرد قادر به درک ترکیب توابع، توابع چند ضابطه ایف بیان تعریف رسمی تابع و ... نیست.

- فرآیند: هنگامی که عملی تکرار می شود و یادگیرنده بر آن بازتاب می کند، آن عمل به صورت یک فرایند، درونی می شود. در این زمان، یادگیرنده برای انجام عملی، دارای ساختار درونی می شود. یعنی درونی سازی به شخص این امکان را می دهد که از یک عمل اگاه شده و آن را با اعمال دیگر ترکیب کند، یا دو یا چند فرآیند را برای ساختن فرایند جدیدف هماهنگ کند. فرآیندها همان ساختار درونی عمل را دارند، ولی به محرک بیرونی نیازی ندارند و کنترل در دست خود یادگیرنده است. درونی سازی این اجازه را به شخص می دهد که از یک عمل آگاه باشد، بر آن تامل کند و آن را با اعمال دیگر ترکیب کند. به عبارت دیگر اگر فرآیندی برای یادگیرنده درونی سازی شده باشد، ممکن است که او بتواند آن را وارونه کند و از آن برای حل مسائلی استفاده کند [۳]. به عنوان مثال در مبحث تابع، فرد درک می کند که تابع مانند فعلی است که می تواند کاری را انجام بدهد. مثلا در تابع $f(x) = x^2$ ، فرد می تواند با تعدادی نقطه شکل را رسم کند و درک کند که یک تابع درجه دوم است و نمودار آن سهمی شکل است. همچنین این نمودار با مقادیر منفی، یک تابع نزولی و با مقادیر مثبت یک تابع صعودی است.

- شیء: زمانی که شخص از فرایند همانند یک کلیت آگاه می شود و پی می برد که می تواند عمل ها را تغییر دهد و حقیقتا قادر به ساختن چنین تغییراتی باشد، تفکر او از سطح فرآیند به سطح شیء رسیده است یا اصطلاحا فرآیند در شیء خلاصه شده است. تشکیل شیء یا شیء انگاری وجه مشترک تمام نظریه های یادگیری ریاضی است و اغلب تصور می شود که خلاصه کردن فرآیند به شیء مشکل است و راهبرد آموزشی لازم برای انجام این کار وجود ندارد. در مثال تابعف یادگیرنده زمانی در سطح شیء است که از انجام عمل هایی که می تواند روی برخی توابع انجام بدهد، آگاه باشد. به طور مشخص در تعریف $h = f + g$ فرد بتواند تابع h را به صورت جمع دو تابع دیگر درک نماید. همچنین در توابع ضمنی مانند $x^2 + y^2 = 25$ فرد بتواند نمودار یک دایره را رسم کرده و متغیر x ، y را به هم

وابسته کند و بفهمد که این رابطه یک تابع نیست، چون خطوط عمودی را در دو نقطه قطع می کند. در واقع می توان گفت اگر یادگیرنده بتواند تعریف رسمی تابع را درک نماید، در این سطح قرار می گیرد. به گفته اسلامی مسلم زمانی که یادگیرنده بتواند اجرای عملیات روی تابع را تصور کند بودن آنکه به تابع های مشخص رجوع کند، او در سطح شیء قرار دارد.

- طرحواره: اعمال، فرایندها و اشیاء پس از این که ساخته شدند، می توانند به روش های گوناگون به یکدیگر مربوط و به هم متصل شوند. مثلا دو یا چند فرآیند ممکن است توسط اتصال به یکدیگر از طریق ترکیب یا شیوه های دیگر به هم مربوط شوند. همچنین شخص می تواند بر طرحواره ها بازتاب کرده و روی آنها عمل کند که این کار منجر به تبدیل شدن طرحواره به شیء جدیدی می شود. بنابراین اشیاء به دو صورت ساخته می شوندف هم از فرایندها و هم از طرحوره ها. طرحواره ها خود می توانند در طرحواره های سطوح بالاتر نقش داشته باشند. در واقع طرحواره ها ی سطوح پایین تر می توانند به عنوان اشیاء برای طرحواره های سطوح بالاتر به حساب بیایند. در سطح طرحواره یادگیرنده مجموعه ای از عمل ها، فرآیندها و اشیاء و دیگر طرح واره ها را در اختیار دارد و می تواند آنها را در ارتباط با مفهوم تابع به هم مرتبط کند. او می تواند میان سطوح عمل، فرآیند، شیء و طرحواره تابع؛ عقب و جلو برود. یکدیگر ترکیب نماید. [۳] در دو جدول ۱ و ۲ کاربرد نظریه APOS برای دو مفهوم تابع و حد آمده است. به این ترتیب که برای هر کدام از این دو مفهوم، چهار سطح عمل، فرآیند، شیء، و طرحواره به تفکیک مشخص شده اند.

جدول ۱: طبقه بندی مفهوم تابع [۲]

	سطح	توصیف
مفهوم تابع	عمل	یافتن مقدار تابع، ترسیم تابع ساده خطی، تشخیص تابع از روی زوج مرتب
	فرآیند	یافتن مقدار تابع چند ضابطه ای، ترسیم تابع درجه دو، ترسیم تابع با استفاده از انتقال، تشخیص تابع از روی نمودار، ترسیم تابع چند ضابطه ای به صورت ناقص
	شیء	شخیص ضابطه تابع از روی نمودار آن، ترسیم نمودار تابع چند ضابطه ای به طور کامل، تشخیص دامنه و برد توابع، درک تعریف رسمی تابع
	طرحواره	به کار بردن توابع مانند تابع باروری و ...، حرکت بین بازنمایی های مختلف تابع

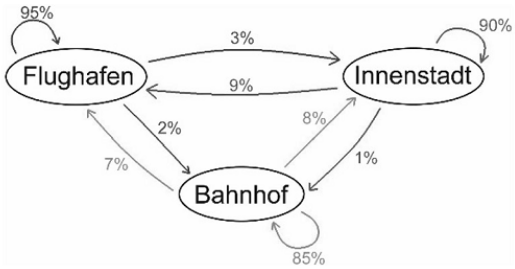
جدول ۲: طبقه بندی مفهوم حد [۲]

	سطح	توصیف
مفهوم حد	عمل	محاسبه حد تابع داده شده دریک نقطه خاص که مستلزم محاسبه از طریق جایگذاری در تابع است.
	فرآیند	فتن حد تابع چند ضابطه ای در نقاط کرانی، در نقاط تعریف نشده، یافتن حد تابع از روی نمودار، محاسبه حد چپ و راست برای توابع دو ضابطه ای،
	شیء	تشخصی وجود حد در دو بازنمایی هندسی و جبری به طور همزمان
	طرحواره	محاسبه حد بینهایت و حد در بینهایت، تشخیص پیوستگی تابع و طرحواره بررسی پیوستگی

۳ مثال های کاربردی برای کلاس درس جبر خطی با استفاده از نظریه APOS

مقدار ویژه، بردار ویژه و فضای ویژه یک ماتریس، یکی از مهمترین مفاهیم جبرخطی است و در این بخش، کاربرد نظریه APOS برای این مفهوم با جزییات بیشتر به همراه مثال، آمده است. برای این مفهوم در سطح عمل می توان این موارد را بیان کرد. محاسبه ضرب مقدار اسکالر در بردار دلخواه، یا محاسبه ضرب یک بردار در یک ماتریس مربعی، و در بازنمایی هندسی تشخیص اینکه ضرب اسکالر در بردار چه تغییری در آن بردار به وجود می آورد. مفهوم بردار ویژه در سطح فرآیند: فرض کنید که مقدار ویژه و بردار ویژه یک ماتریس به شما داده شده است. معادله ریاضی متناسب با این داده ها را چگونه نمایش می دهید؟ در بازنمایی هندسی، فرض کنید دو مقدار ویژه و دو بردار ویژه یک ماتریس دلخواه به شما داده شده است.

حاصلضرب ماتریس در هر یک از این بردارهای ویژه را در صفحه مختصات دکارتی نمایش دهید. مفهوم بردار ویژه در سطح شیء: چگونه می توان تشخیص داد که یک بردار، می توان به عنوان یک بردار ویژه برای یک ماتریس باشد؟ درباره مقادیر ویژه یک ماتریس چه چیزهایی می توان گفت؟ درباره فضای ویژه یک ماتریس چه چیزهایی می توان گفت؟ چه تعداد بردار ویژه متناظر با یک مقدار ویژه وجود دارد؟ مفهوم بردار ویژه در سطح طرحواره: یک شرکت کرایه اتومبیل، سه مرکز برای اجاره خودرو در سطح شهر دارد. اولین مرکز در نزدیکی فرودگاه قرار دارد. دومین مرکز در نزدیکی ایستگاه قطار و سومین مرکز در میدان مرکزی شهر قرار گرفته است. شکل زیر نشان می دهد که مشتریان (در یک مدت زمانی مشخص) از کجا ماشین را تحویل گرفته اند و در کجا ماشین را تحویل داده اند.



اگر داده ها را به شکل ماتریسی استخراج کنیم، به تساوی زیر می رسیم.

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ B_{n+1} \\ I_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰/۹۵ & ۰/۰۷ & ۰/۰۹ \\ ۰/۰۲ & ۰/۸۵ & ۰/۰۱ \\ ۰/۰۳ & ۰/۰۸ & ۰/۹۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ B_n \\ I_n \end{pmatrix}$$

بدون انجام محاسبه، چه چیزهایی درباره مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و فضای ویژه این ماتریس، می توان گفت؟

۴ کاربردهای نظریه APOS در فرآیند یاددهی-یادگیری ریاضی دانشگاهی

به کار بردن نظریه APOS برای یک مفهوم خاص ریاضی، معمولا یک تجزیه ژنتیکی (گام به گام) به دست می دهد. این تجزیه گام به گام، به مثابه یک مدل نظری، ساختارها و مکانیسم های درگیر در ساخته شدن یک مفهوم یا موضوع ریاضی را به تصویر می کشد و معمولا به وسیله پژوهشگران فرضیه سازی می شود. از این مدل نظری می توان به عنوان یک ابزار تحقیقاتی برای تجزیه و تحلیل ساخته های ذهنی دانشجویان، استفاده نمود. همچنین می توان این مدل های نظری را برای طراحی فعالیت های و تکالیف ریاضی به کار گرفت. معمولا این فعالیت های طراحی شده در توسعه دستورالعمل های تدریس که منجر به توسعه درک مفهومی ریاضی می شوند، مفید و کارآمد هستند. البته لازم به ذکر است که تجزیه ژنتیکی (گام به گام) لازم است توسط پژوهش های مختلف و با استفاده از داده های حاصل از مشاهده ساخته های ذهنی دانشجویان، اعتبار سنجی شده و سپس مورد استفاده قرار گیرد. از نظریه APOS می توان در پژوهش های آموزش ریاضی و برای تجزیه و تحلیل سطح فهم دانشجویان از مفاهیم مختلف ریاضی استفاده کرد. به این ترتیب که از طریق مستند سازی روند توسعه شناختی دانشجویان در درک مفاهیم ریاضی می توان نقاط انتقالی (گلوگاه های) درک مفاهیم ریاضی را شناسایی کرد و برای رسیدن به درک عمیق تر، پیشنهادات لازم را ارایه نمود. به طور مشخص در حوزه یاددهی-یادگیری جبرخطی، با استفاده از این نظریه می توان تشخیص داد که چه ساختارهای ذهنی ای برای یادگیری مفاهیم جبر خطی درگیر می شوند. همچنین با مقایسه عملکرد دانشجویان خبره و تازه کار در حین حل مسایل ریاضی، می توان ایده هایی برای بهبود عملکرد دانشجویان ضعیف تر در حل مسایل جبرخطی، ارایه کرد. به طور کلی، ایده های مطرح شده در این مقاله می تواند توسط استادان و دانشجویان تحصیلات تکمیلی که به حوزه آموزش ریاضی در سطح دانشگاهی علاقمند هستند، مورد استفاده قرار گیرد.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، نظریه APOS معرفی شد که به صورت گسترده توسط پژوهشگران علاقمند به حوزه آموزش ریاضی دانشگاهی در سرتاسر دنیا به کار گرفته شده است. این نظریه کاربردهای فروانی دارد و برای هدف های پژوهشی، طراحی فعالیت های مناسب در برنامه درسی و ارزشیابی عملکرد ریاضی دانشجویان؛ می تواند مورد استفاده قرار بگیرد. به طورمشخص، دست یافتن به گام آخر نظریه APOS (یعنی طرحواره) می تواند عملکرد دانشجویان را در حل مسایل غیر روتین بهبود ببخشد.

مراجع

[۱] ا. رفیع پور، استفاده از رویکرد مدلسازی و کاربردها در تدریس جبرخطی، *هشتمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن*، (۱۳۹۴)

[۲] الف. ریحانی و ز. شریفی، بررسی درک دانش آموزان دختر سال سوم متوسطه از مفهوم حد و پیوستگی، *نشریه علمی-پژوهشی فناوری آموزش*، ۱۲ (۱۳۹۷)، شماره ۴، ۲۷۳–۲۹۰.

[3] E. Dubinsky and M. McDonald, APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton., M. Artigue, U. Krichgraber, J. Hillel, M. Niss & A. Schoenfeld (Eds.), The teaching and learning of mathematics at university level: An international commission on mathematical instruction study (273–280). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. (2001)

[4] E. Nardi, From Advanced Mathematical Thinking to University Mathematics Education: A story of emancipation and enrichment, plenary in CERME 10, 2017.

[5] E. Possani, M. Trigueros, J.G. Preciado and M.D. Lozano, Use of Models in the Teaching of Linear Algebra , *Linear Algebra and its Application*, 432 (2010), 2125–2140.

[6] S. Stewart, Ch. Andrews□Larson and M. Zandieh, Linear algebra teaching and learning: themes from recent research and evolving research priorities, *ZDM Mathematics Education*, 51 (2019), 1017–1030.

دانشگاه شهید باهنر کرمان، ایران
دهمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن
۲۶ لغایت ۲۹ مرداد ۱۳۹۹
Shahid Bahonar University of Kerman, Iran
Seminar on Linear Algebra and its Applications
August 16 - 19 , 2020

موازی سازی الگوریتم تجزیه مقادیر منفرد بر روی GPU و کاربرد آن در نهان نگاری تصاویر دیجیتال[1]

زهره شفیعی و فرشید عبدالهی*
بخش ریاضی، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

چکیده

باگسترش روز افزون فضای مجازی به عنوان محیطی برای انتقال سریع و آسان انواع اطلاعات، از جمله صوت، تصویر، فیلم و ...، امکان به اشتراک گذاشتن اطلاعات برای افراد بوجود آمده است. با وجود مزایای آن، این گونه انتقال اطلاعات می‌تواند مشکلات جدی برای مولفانی که نمی‌خواهند آثارشان بدون اجازه خودشان پخش شود، ایجاد کند. به همین دلیل حفاظت از اطلاعات دارای حق نشر [2] امری ضروری است. یکی از بهترین روش‌ها برای رفع این مشکل نهان نگاری دیجیتال است. در سال‌های اخیر، روش جدید نهان‌نگاری در حوزه تبدیل تجزیه مقادیر منفرد (SVD) مورد مطالعه قرار گرفته است. SVD یکی از مفیدترین ابزارهای جبر خطی برای کاربردهای مختلف مانند فشرده‌سازی تصویر و سایر زمینه‌های پردازش تصویر و سیگنال می‌باشد. از آنجا که حجم داده‌ها روز به روز در حال افزایش است، نهان نگاری تصاویر دیجیتالی با استفاده از واحد پردازش گرافیکی (GPU) [3] اخیرا طرفداران زیادی پیداکرده است، چرا که این فناوری امکان اعمال الگوریتم‌های پیشرفته‌تر و نیز افزایش سرعت را به همراه دارد. با توجه به اینکه الگوریتم SVD دارای پیچیدگی و محاسبات بالا است، در این مقاله برای افزایش سرعت محاسبات و کاهش زمان اجرا، پیاده سازی موازی SVD بر روی GPU و نهان نگاری تصاویر دیجیتال با استفاده از CUDA [4] انجام شده است. نتایج نشان می‌دهند که زمان اجرا به اندازه قابل توجهی کاهش پیدا کرده است.

واژه‌های کلیدی: تجزیه مقدارمنفرد (SVD)، نهان نگاری، واحدپردازش گرافیکی (GPU)، موازی سازی
کد موضوع‌بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 15A18، 65F15، 68U10

۱ تجزیه مقادیر منفرد (Singular Value Decomposition)

فرض کنید $m \geq n$ و $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ یک ماتریس با r مقدار تکین مثبت $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ باشد. آنگاه ماتریس‌های متعامد $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ و $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و ماتریس قطری $\tilde{\Sigma}_A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ وجود دارند به گونه‌ای که

$$A = U\tilde{\Sigma}_A V^T, \quad \tilde{\Sigma}_A = \begin{pmatrix} \Sigma_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

که در آن $\Sigma_A = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$. به این تجزیه، تجزیه مقادیر منفرد (SVD) گفته می‌شود.
الگوریتم محاسبه SVD دو گام اصلی دارد؛ ابتدا با استفاده از تبدیلات هاوس هولدر، ماتریس‌های متعامد P و Q را به گونه‌ای می‌یابیم که ماتریس $B = PAQ^T$ یک ماتریس دو قطری باشد؛ بوضوح، مقادیر منفرد ماتریس بدست آمده با مقادیر منفرد ماتریس A یکی است. درگام بعدی تجزیه مقدار منفرد ماتریس دوقطری B را بدست می‌آوریم. با بدست آمدن این تجزیه، تجزیه مقادیر منفرد A نیز بدست می‌آید (به مرجع [۳] مراجعه شود).

[1] تقدیم به شادروانان علیرضا افضلی پور و فاخره صبا، بنیانگذاران دانشگاه کرمان
*سخنران. آدرس ایمیل: abdollahi@shirazu.ac.ir

[2] Copyright
[3] Graphics Processing Unit
[4] Compute Unified Device Architecture

ایده‌ی نهان‌نگاری دیجیتال برای اولین بار درسال ۱۹۹۰ پدید آمد و از آن به بعد تحقیقات دراین زمینه به صورت نمایی رشد یافت. اولین روش نهان‌نگاری برای تصاویر دیجیتالی توسط کارونی[1] در سال ۱۹۹۳ ارائه گردید و در سال ۱۹۹۵ در [۲] به چاپ رسید؛ هر چند مقالاتی نیز قبل از آن برای ایده برچسب زدن تصاویر با اطلاعات محرمانه چاپ گردید [۶]، بعد از آن ایده‌ی استفاده ازنهان‌نگاری در سایر داده‌های دیجیتال مانند صوت و فیلم توسعه یافت. اولین کنفرانس دانشگاهی در این زمینه در سال ۱۹۹۶ برگزار گردید. طی سال‌های گذشته روش‌های نهان‌نگاری مختلفی ازجمله تجزیه مقادیرمنفرد (SVD)[2]، تبدیل کسینوسی گسسته (DCT) [3]، تبدیل موجک گسسته (DWT) [4] و همچنین ترکیبی از این روش‌ها مانند DWT-SVD، DCT-DWT، SVD-DCT و ... ارائه گردیده است [۱، ۴]. امروزه با پیشرفت سریع تکنولوژی و روی کار آمدن واحد پردازش گرافیکی (GPU)، می‌توان با پیاده سازی الگوریتم‌های این روش‌ها روی GPU آن‌ها را بسیار کارآمدتر از قبل ارائه داد.

در نهان نگاری تصاویر، با دو تصویر کار می‌کنیم؛ تصویر میزبان و تصویر نهان نگاره. هدف در مبدا، نهان کردن تصویر نهان نگاره در تصویر میزبان است و در مقصد، هدف بازیابی تصویر نهان شده می‌باشد. در این مقاله با تصاویر با طیف خاکستری کار کرده و ساده‌ترین روش برای نهان نگاری تصویر با استفاده از تجزیه مقادیر تکین بیان شده است؛ مشابه آنچه در اینجا آورده شده است، برای روش‌های پیشرفته‌تر نیز قابل بررسی و پیاده سازی است. فرض کنید ماتریس A نشان دهنده تصویر میزبان و ماتریس W نشان دهنده تصویر نهان نگاره باشد. تجزیه SVD دو ماتریس را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = U_A \tilde{\Sigma}_A V_A^T, \quad W = U_W \tilde{\Sigma}_W V_W^T.$$

به ازای عدد مثبت α، قرار می‌دهیم:

$$\tilde{\Sigma}_\alpha = \tilde{\Sigma}_A + \alpha \tilde{\Sigma}_W, \quad A_\alpha = U_A \tilde{\Sigma}_\alpha V_A^T.$$

ماتریس A_α، نشان دهنده تصویر نهان نگاری شده است. در مقصد، برای بازسازی تصویر W، از روی تصویر اصلی A، تصویر نهان نگاری شده A_α و ماتریس‌های متعامد U_A و W_A، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\tilde{\Sigma}_A = U_A^T A V_A, \quad (۱)$$
$$\tilde{\Sigma}_\alpha = U_A^T A_W V_A, \quad (۲)$$
$$\tilde{\Sigma}_W = \frac{۱}{\alpha}(\tilde{\Sigma}_\alpha - \tilde{\Sigma}_A), \quad (۳)$$
$$W = U_W \tilde{\Sigma}_W V_W^T. \quad (۴)$$

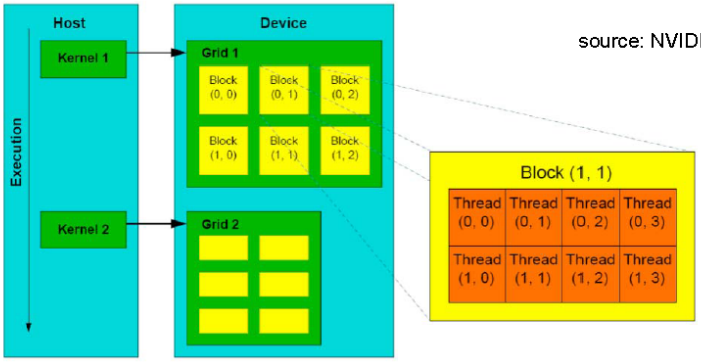
۲ واحد پردازش گرافیکی (GPU)

پردازنده‌های چند هسته‌ای انقلابی بزرگ در صنعت پردازنده‌های رایانه‌ای به حساب می‌آید. این تغییر تاثیرات بسیار زیادی را نیز بر روی تمامی صنایع مرتبط با رایانه‌ها دارد. بطور مثال، تمامی لایه‌های نرم افزاری باید بتوانند در پردازش‌های خود از تمامی هسته‌ها استفاده کنند تا کارایی مناسب به دست آید. بنابر این می‌توان گفت که سازندگان اصلی پردازنده‌ها قسمتی از تعهدات خود برای دست یافتن به پردازش سریع‌تر را بر روی دوش برنامه نویسان قرار داده‌اند. برنامه‌هایی می‌توانند بر روی پردازنده‌های چند هسته‌ای کارایی بالاتری کسب کنند که توانایی موازی شدن را داشته باشند. برای پیاده‌سازی چنین برنامه‌هایی، علاوه بر امکان موازی شدن الگوریتم، توسعه دهندگان آن نرم افزار می‌بایست با چگونگی نوشتن برنامه‌های چند رشته‌ای[5] و همچنین سخت افزار موازی اجرا کننده نیز آشنا شوند.

هر رشته پردازنده‌ای کوچک است که می‌تواند جدای از رشته‌های دیگر بر روی پردازنده‌ی اصلی بارگذاری[6] و اجرا[7] شود. بدین طریق، تکنیک چند رشته‌ای اجازه می‌دهد یک برنامه بتواند رشته‌های متعددی را همزمان ایجاد کرده و هرکدام از آن‌ها را بر روی یک هسته پردازنده اجرا کند. واحد پردازش گرافیکی (GPU) یک تکنولوژی با پردازش کاملا موازی، چند هسته‌ای و

[1] Caronni
[2] Singular Value Decomposition
[3] Discrete Cosine Transform
[4] Discrete Wavlet Transform
[5] Multi-threaded
[6] Load
[7] Execute

چند رشته‌ای برای افزایش سرعت اجرای پردازنده‌هایی با بار محاسباتی بالا است [۵].
در سال‌های اخیر، GPUها به عنوان پردازنده‌ای همه منظوره مطرح شده‌اند؛ GPU پردازنده کارت گرافیک است و پیش از این تنها برای انجام محاسبات گرافیکی مورد استفاده قرار می‌گرفت. مطرح شدن GPUها به عنوان پردازنده‌ای همه‌منظوره، قدرت رایانه رومیزی را به پای یک ابر رایانه ساده می‌رساند، زیرا این پردازنده‌ها بیش از ۱۶ هسته دارند. بدون شک آینده در دست برنامه‌هایی است که مخصوص GPUهای موازی نوشته شده‌اند. در سال‌های اخیر، شرکت‌های بزرگ تولیدکننده GPU زبان‌های برنامه‌نویسی سطح بالایی را ابداع کرده‌اند که کار برنامه‌نویسی GPU را آسان و بی‌واسطه می‌کند. از جمله این زبان‌های برنامه‌نویسی، زبان برنامه‌نویسی CUDA است. کودا زبان برنامه‌نویسی کارت‌های گرافیک شرکت انویدیا [۱] است و البته معماری کارت‌های گرافیک انویدیا نیز به‌طور کلی کودا نامیده می‌شود.
پیدایش برنامه نویسی واحد پردازش گرافیکی (GPU) با کمک کودا مشابه برنامه نویسی در زبان C است. در یک برنامه کودا، تابعی که باید روی GPU اجرا شود را اصطلاحا هسته [۲] نامیده می‌شود. در این برنامه فرآیند یکسانی که باید روی N داده متفاوت انجام شود به شکل یک هسته نوشته می‌شود تا توسط N رشته به صورت موازی اجرا شود.
دربرنامه کودا CPU، به عنوان یک میزبان[۳] و GPU به عنوان یک دستگاه [۴] معرفی می‌شوند. در یک برنامه کودا ابتدا داده‌ها توسط میزبان در حافظه بارگذاری می‌گردد، پس از اختصاص فضای مورد نیاز بر روی CPU و GPU، داده‌ها از روی میزبان به دستگاه انتقال داده می‌شود. برنامه نویس تعداد رشته‌ها را از طریق تعیین تعداد رشته‌ها در هر بلوک و تعداد بلوک در هر شبکه مشخص می‌کند؛ یک بلوک یک آرایه یک، دو یا سه بعدی از رشته‌ها می‌باشد که اجرای آنها را با استفاده از حافظه مشترک هم زمان می‌کنند. هر بلوک توسط تنها یک چندپردازنده اجرا می‌شود.
برای هر رشته در برنامه کودا، یک شبکه شامل دسته‌ای از بلوک‌هاست که می‌تواند یک، دو یا سه بعدی باشد و بلوک‌ها مجموعه‌ای از رشته‌ها هستند. ابعاد بلوک و شبکه به داده‌ها و ساختار مساله بستگی دارد. فاکتورهای محدود کننده در اینجا حداکثر تعداد رشته در هر بلوک و تعداد پردازنده‌ها در هرسیستم می‌باشد. شکل ۱ یک شبکه را نشان می‌دهد.
هسته فراخوانی می‌شود و پس از اتمام اجرای هسته، نتایج از دستگاه به میزبان انتقال می‌یابند. شکل ۲ نمایی از چگونگی انجام پذیرفتن این روند است.

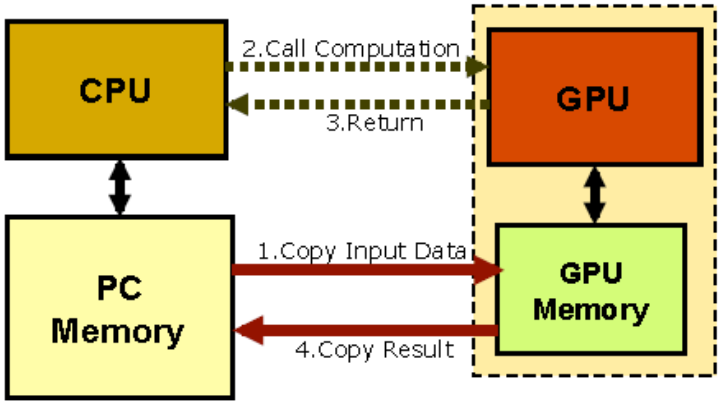


شکل ۱: شبکه‌ای از بلاک‌ها

۳ موازی سازی نهان نگاری تصاویردیجیتال با استفاده ازروش SVD برروی GPU

ساده‌ترین قسمت برای موازی کردن الگوریتم نهان نگاری، این است که تمامی ضرب‌های ماتریسی که در فرآیند به دست آمدن SVD ونهان نگاری مورد استفاده قرارگرفته‌اند را موازی کنیم (شکل ۳). برای موازی کردن ضرب دو ماتریس ابعاد هر بلوک CUDA روی ۳۲ × ۳۲ تنظیم می‌شود. همچنین ابعاد شبکه (Grid) دقیقا بر اساس تعداد بلوک‌های ۳۲ × ۳۲، مشخص می شود. به عنوان مثال، اگر اندازه تصویر ورودی ۵۱۲ × ۲۵۶ باشد، تعداد بلوک‌های ۳۲ × ۳۲ مستقل که برای تجزیهSVD مورد استفاده قرار می‌گیرد، ۱۶ × ۸ است. بنابر این، اندازه شبکه به ۱۶ × ۸ تنظیم می‌شود.

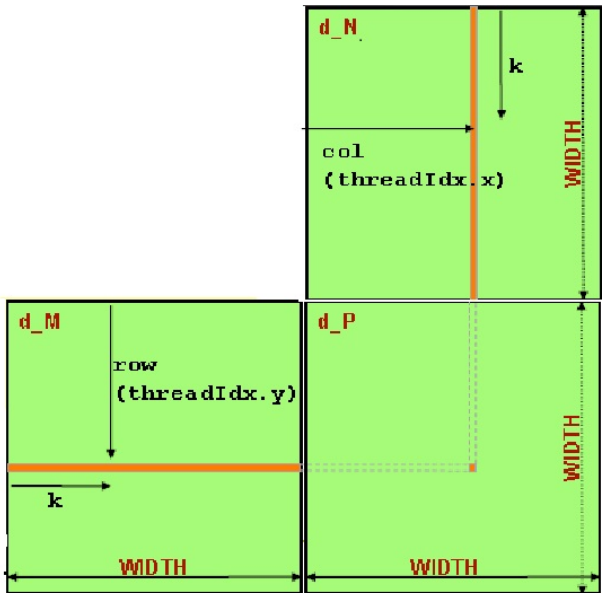
[1] NVIDIA
[2] Kernel
[3] Host
[4] Device



شکل ۲: روند اجرای برنامه در کودا

بنابراین برای ضرب ماتریسی $C = AB$، ماتریس‌های A، B و C به بلوک‌های دو بعدی ازسطر و ستون باسایز ۳۲ × ۳۲ تقسیم می‌شوند، و هر رشته (thread) در هر بلوک از ماتریس C، ضرب داخلی یک بردار سطری ازماتریس A در یک بردار ستونی از ماتریس B را محاسبه می‌کند. این روند برای بلوک‌های باقی مانده از ماتریس‌ها تکرار می‌شود. بنابر این برای ضرب دو ماتریس، مختصات سطر و ستون که با i و j نشان داده می‌شوند به صورت زیر می‌باشد: (رجوع شود به [۵])

$$\mathrm{i} = \mathrm{blockIdx.x} * \mathrm{blockDim.x} + \mathrm{threadIdx.x};$$
$$\mathrm{j} = \mathrm{blockIdx.y} * \mathrm{blockDim.y} + \mathrm{threadIdx.y};$$



شکل ۳: پیاده سازی موازی ضرب دو ماتریس روی GPU

۴ نتایج تجربی

نتایج حاصل از پیاده سازی الگوریتم SVDو نهان نگاری تصاویر دیجیتال با استفاده از این روش را به صورت سریال و موازی در جدول‌های زیر آمده است؛ بعد از چند بار اجرا، نتایج به صورت میانگین محاسبه شده‌اند. این نتایج نشان دهنده این است

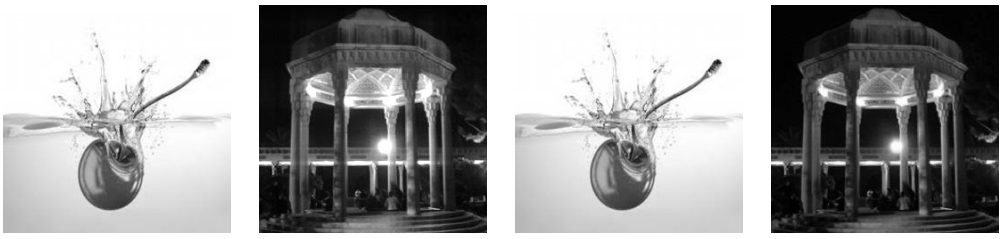
که برای ابعاد بالا، استفاده از الگوریتم موازی در GPU سرعت را به حد قابل توجهی افزایش می‌دهد (زمان اجرا بر حسب ثانیه است).

جدول ۱: پیاده‌سازی lrSVD بر روی CPU وGPU

اندازه تصویر	زمان اجرا بر روی CPU	زمان اجرا بر روی GPU	تسریع
۶۴ × ۶۴	۰٫۵۶۷	۰٫۷۹۷	۰٫۷۱۱
۱۲۸ × ۱۲۸	۷٫۴۶۵	۱٫۷۴۲	۴٫۲۸۵
۲۵۶ × ۲۵۶	۱۹۲٫۵۶۳	۹٫۴۸۲	۲۰٫۳۰۸

جدول ۲: نهان‌نگاری تصاویردیجیتال با استفاده از SVD بر روی CPU وGPU

تصویر ۲۵۶ × ۲۵۶	زمان اجرا بر روی CPU	زمان اجرا بر روی GPU	تسریع
درج تصویر	۳۸۵٫۹۲۵	۱۸٫۳۵۹	۲۱٫۰۲۱
استخراج تصویر	۱۹۲٫۷۸۱	۹٫۱۴۱	۲۱٫۰۹



(آ) تصویرمیزبان (ب) تصویرنهان نگاره (ج) تصویرنهان نگاری شده (د) تصویراستخراج شده

شکل ۴: نتایج نهان نگاری تصاویردیجیتال

مراجع

[1] D. Aucsmith, Information Hiding: Second International Workshop, *Computer Science,* **1**525 (1998).

[2] G. Caronni, Assuring ownership rights for digital images, *J Verläßliche IT-Systeme,* (1995) 251-263.

[3] G.H. Golub and C.F. Van Loan, Matrix Computations. 4th Edition, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2013.

[4] M. Kutter, S. K. Bhattacharjee and T. Ebrahimi, Towards second generation watermarking schemes, *Image Prcessing,* **1** (1999) 320-323.

[5] NVIDIA Corporation, NVIDIA CUDA C Programming Guide, 2019.

[6] K. Tanaka, Y. Nakamura and K. Matsui, Embedding the attribute information into a dithered image, *Systems and Computers in Japan,* **2**1(7) (1990) 43-50.

مقالات فارسی

بخش دوم: پوسترها

دانشگاه شهید باهنر کرمان، ایران
دهمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن
۲۶ لغایت ۲۹ مرداد ۱۳۹۹
Shahid Bahonar University of Kerman, Iran
10th Seminar on Linear Algebra and its Applications
August 16 - 19 , 2020

مقایسه شبکه عصبی سلسه مراتبی با تحلیل مسیر در مدل‌های رگرسیونی[۱]

فرشته آراد* **و ایوب شیخی**

بخش آمار، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر، کرمان، ایران

چکیده

هدف از این پژوهش مقایسه شبکه عصبی سلسه مراتبی با تحلیل مسیر در مدل‌های رگرسیونی است. یک مدل شبکه عصبی سلسله مراتبی با دو زیر شبکه که زیر شبکه اول با ایجاد گره و لایه بین مجموعه متغیرهای مستقل و میانجی و زیر شبکه دوم با ایجاد گره و لایه بین مجموعه متغیرهای مستقل و خروجی زیر شبکه قبل با متغیر وابسته ساخته می‌شود. دراین راستا با استفاده از بانک داده‌های نرم افزار SPSS به مقایسه این دو روش مذکور پرداخته‌ایم. داده‌ها را به نسبت ۶۰ درصد و ۴۰ درصد به دو گروه آزمایش و امتحان تقسیم بندی کرده‌ایم. معیار مقایسه دو روش RMSE (میانگین مجذور خطا) بود. بررسی‌های عددی روی داده‌های واقعی نشان داد که میانگین مجذور خطا آزمایش و امتحان شبکه عصبی سلسله مراتبی نسبت به تحلیل مسیر، دارای خطای کمتری است. بنابراین می‌توان گفت در این مجموعه از داده‌ها شبکه عصبی عملکرد بهتری نسبت به تحلیل مسیر دارد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل مسیر، شبکه عصبی(NN)، شبکه عصبی سلسله مراتبی، میانگین مجذور خطا(RMSE)
کد موضوع‌بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 62M10، 62M45

۱ مقدمه

تحلیل مسیر برای نخستین بار توسط سویل رایت جهت مطالعات علوم اجتماعی توسعه یافت و تعمیم یافته روش رگرسیون چند متغیره در ارتباط با تدوین مدل‌های علی ارائه شده‌است. تحلیل مسیر یک روش پیشرفته آماری است که به کمک آن می‌توانیم علاوه بر تاثیرات مستقیم، تاثیرات غیرمستقیم هر یک از متغیرهای مستقل بر متغیر وابسته را نیز شناسایی کنیم. در تحلیل مسیر ما می‌توانیم میزان کاذب بودن روابط بین متغیرها را نیز نشان دهیم. یعنی چقدر از این روابط ناشی از متغیر مستقل مورد نظر و چقدر ناشی از متغیرهای خارج از تحلیل است. روش تحلیل مسیر به این دلیل محبوبیت یافته است که برآورد نقش نسبی متغیرها را در یک شبکه علی امکان پذیر، و پژوهشگر را قادر می‌سازد ساختار علی زیربنای متغیرها را آشکار نماید. با پیشرفت روزافزون علم، روش‌های جدیدتری مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روش ها علاوه براینکه محدودیت‌های روش‌های رگرسیون مرسوم را ندارند بلکه مزایای بسیار زیادی دارند. در این بین، شبکه عصبی می‌تواند یکی از مناسب ترین روش‌ها باشد. شبکه‌های عصبی نوعی نماینده تکنولوژی قدرتمند کامپیوترهای مدرن هستند، اما ایده آن به سال ۱۹۴۳ برمی‌گردد. زمانی که دو محقق با نام‌های وارن مک کلاچ[۲] که یک متخصص نوروفیزیولوژی بود و والتر پیتز[۳] ریاضی دان در دانشگاه شیکاگو تحقیق روی شبکه‌های عصبی را شروع کردند. زمانی که رساله آن‌ها با عنوان «یک محاسبه منطقی از ایده‌های مبتنی بر فعالیت عصبی» در مجله نظریه مغز منتشر شد، این تئوری رواج یافت که فعال‌سازی یک نورون واحد پایه فعالیت مغز است. در دهه ۴۰ میلادی اولین شبکه عصبی طراحی شد. شبکه مزبور قادر به محاسبه توابع منطقی بود. امروزه حداقل بیش از ۵۰ نوع شبکه عصبی طراحی گردیده‌است. شبکه عصبی تا حد زیادی ملهم از سیستم‌های یادگیری طبیعی است که در آن یک مجموعه پیچیده از نرون‌های به هم متصل در کار یادگیری دخیل هستند. انواع مختلفی از

[۱] تقدیم به شادروانان علیرضا افضلی پور و فاخره صبا، بنیانگذاران دانشگاه کرمان

*سخنران. آدرس ایمیل: fereshteh_arad@yahoo.com

[2] Warren McCulloch
[3] Walter Pitts

مدل‌های محاسباتی تحت عنوان کلی شبکه‌های عصبی معرفی شده‌اند، که هر یک برای دسته‌ای از کاربردها قابل استفاده‌اند. این شبکه‌ها برای تخمین و تقریب، کارایی بسیار بالایی از خود نشان داده‌اند. به مرور زمان افراد بسیاری روی شبکه‌های عصبی کارکرده‌اند [۲،۵]. گستره کاربرد این مدل‌های ریاضی برگرفته از عملکرد مغز انسان، بسیار وسیع می‌باشد که به عنوان چند نمونه کوچک می‌توان استفاده از این ابزار ریاضی در پردازش سیگنال‌های بیولوژیکی، مخابراتی، الکترونیکی، نجوم، فضانوردی و غیره را نام برد.

تحلیل مسیر روش آماري کاربرد ضرایب بتاي استاندارد رگرسیون چند متغیری در مدل‌های ساختاري است. هدف تحلیل مسیر به دست آوردن برآوردهای کمی روابط علّی (همکنشي یکجانبه یا کواریته) بین مجموعه‌ای از متغیرهاست. ساختن یک مدل علّی لزوماً به معنای وجود روابط علّی در بین متغیرهای مدل نیست بلکه این علیت بر اساس مفروضات همبستگي و نظر و پیشینه تحقیق استوار است. تحلیل مسیر بیان می‌کند که کدام مسیر مهمتر و یا معنادارتر است. ضرایب مسیر براساس ضریب استاندارد شده رگرسیون محـــاسبه می‌شود. با داشتن ضرایب مسیر استاندارد، می‌توان رگرسیون را به تحلیل مسیر تبدیل کرد. علاوه بر این با استفاده از تحلیل مسیر می‌توان همبستگی بین متغیرها را به صورت اثر مستقیم، اثر غیرمستقیم و اثر کل نشان داد. سوالی که ممکن است پیش آید آن است که درصورتیکه بخواهیم بین متغیرهای مستقل مسیرهایی را برقرار کنیم، از بین آن‌ها کدامیک را باید متغیر وابسته در نظر بگیریم؟ و ارتباط بقیه را با آن مورد بررسی قرار دهیم. در واقع می‌توان تحلیل مسیر را با استفاده از رگرسیون انجام داد. بدین منظور ابتدا می‌توان رگرسیون چندگانه بین متغیر وابسته اصلی و متغیرهای مستقل انجام داد. سپس برای بررسی ارتباط بین متغیرهای مستقل، از بین آنها متغیری را به عنوان متغیر وابسته جدید در نظر می‌گیریم که بیشترین ارتباط را با متغیر وابسته اولیه داشته است. برای مشخص کردن آن متغیر، از ضریب بتای استاندارد استفاده می‌کنیم و هر متغیری که بیشترین ضریب را داشت، به عنوان متغیر وابسته دوم در نظر گرفته و رگرسیون چندگانه بین آن و سایر متغیرهای مستقل انجام می‌دهیم. درگام بعد نیز متغیری که با متغیر وابسته دوم بیشترین ارتباط را دارد به عنوان متغیر وابسته جدید در نظر می‌گیریم و به همین منوال ادامه می‌دهیم [۱].

کلیه متغیرهاي موجود در یک مدل و الگوي علي داراي دو نوع اصلي می‌باشند. نوع اول متغیر برون‌زا و نوع دوم متغیر درون‌زا نام دارد. متغیر برون‌زا متغیري است که هیچ اثري از سایر متغیرهاي الگو و مدل طراحي شده نمي‌پذیرد. در حقیقت مقدار متغیر برون‌زا توسط سایر متغیرهاي درون مدل تعیین نمي‌شود بلکه مقدار آن درخارج مدل تعیین مي‌شود. متغیر درون‌زا(وابسته) متغیري است که از حداقل یک متغیر دیگر در مدل و الگوي طراحي شده اثر مي‌پذیرد. مقدار متغیر درون‌زا توسط سایر متغیرهاي درون مدل تعیین مي‌شود. بنابر این براساس تعریف، یک متغیر نمیتواند همزمان هم درون‌زا و هم برون‌زا باشد. از نظر نموداري متغیر برون‌زا متغیري است که هیچ فلشي به آن وارد نمي‌شود در حالیکه متغیر درون‌زا متغیري است که حداقل یک فلش به آن وارد مي‌شود.

فلسفه اصلی شبکه عصبی، مدل کردن ویژگی‌های پردازشی مغز انسان برای تقریب زدن روش‌های معمول محاسباتی با روش پردازش زیستی است. به بیان دیگر، شبکه عصبی روشی است که دانش ارتباط بین چند مجموعه داده را از طریق آموزش فراگرفته و برای استفاده در موارد مشابه ذخیره می‌کند [۳]. این پردازنده از دو جهت مشابه مغز انسان عمل می‌کند:

یادگیری شبکه عصبی از طریق آموزش صورت می‌گیرد.

وزن‌دهی مشابه با سیستم ذخیره‌سازی اطلاعات، در شبکه عصبی مغز انسان انجام می‌گیرد.

در حالت کلی در شبکه های عصبی ۳ نوع لایه نرونی وجود دارد:

۱.لایه ورودی: دریافت اطلاعات خامی که به شبکه تغذیه شده است.

۲.لایه‌های پنهان: عملکرد لایه‌های پنهان به وسیله ورودی‌ها و وزن ارتباط بین آنها و لایه‌های پنهان تعیین می‌شود. وزن‌های بین واحدهای ورودی و پنهان تعیین می‌کند چه وقت یک واحد پنهان باید فعال شود.

۳.لایه خروجی: عملکرد واحد خروجی بسته به فعالیت واحد پنهان و وزن ارتباط بین واحد پنهان و خروجی می‌باشد.

از قابلیت‌های شبکه عصبی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱.محاسبه یک تابع معلوم

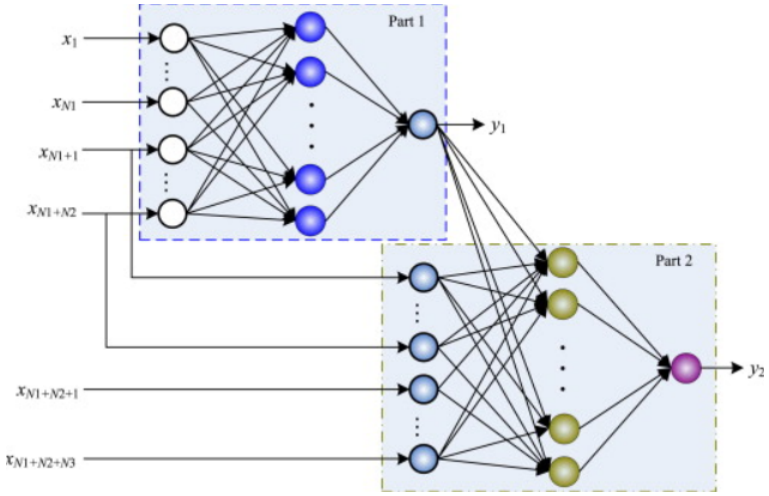
۲.تقریب یک تابع ناشناخته شناسائی الگو

۳.پردازش سیگنال

۴.یادگیری انجام موارد فوق

شبکه‌های عصبی انواع مختلفی دارند مانند شبکه‌های پیشخور، شبکه‌های عصبی پس انتشار خطا، شبکه‌های عصبی پسخور (برگشتی)،LVQ، شبکه عصبی Multilayer Percention یا درک چند لایه‌ای و شبکه عصبی با ساختار سلسله مراتبی که خروجی سلول‌های عصبی در سطح سلسله مراتبی بالاتر به عنوان یک داده ورودی معادل نورون‌های ورودی در سطح سلسله مراتبی پایین‌تر قرار می‌گیرند. شبکه عصبی سلسله مراتبی از آن جهت مورد توجه است که بر تجزیه و تحلیل زیر شبکه‌ها تمرکز دارد [۴].

همچنین مدل‌ها از نظر دقت برازش مدل‌های آزمایش و خطا به سه گروه تقسیم می‌شوند. گروه اول فرابرازش، آنقدر پیچیده است که برای داده‌های آزمون جواب عالی می‌دهد اما همین پیچیدگی باعث می‌شود برای داده‌های امتحان جواب بسیار بد بدهد. گروه دوم فروبرازش، آنقدر ساده است که برای داده‌های آزمون جواب بسیار بد می‌دهد و همین سادگی باعث می‌شود برای داده‌های امتحان جواب عالی بدهد و گروه سوم عینا برازش شده، نه پیچدگی فرابرازش را دارند و نه سادگی فروبرازش و همین ویژگی باعث می‌شود که دقت آنها در داده‌های آزمون به اندازه داده‌های امتحان باشد.



شکل ۱: مدل شبکه عصبی سلسله مراتبی.

۲ نتایج اصلی

مدل آماری

فرض کنید چهار متغیرv_1،v_2،v_3 و v_4وجود داشته باشد. به طورکلی مدل آماری یک تحلیل مسیر که در آن دو متغیر مستقل، یک متغیر میانجی و یک متغیر وابسته وجود داشته باشد به صورت زیر است:

$$v_1 = \alpha_0 + \alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_3 + \alpha_3 v_4 + \varepsilon_1$$
$$v_4 = \beta_0 + \beta_1 v_2 + \beta_2 v_2 + \varepsilon_2$$

که در آن v_2،v_3متغیرهای مستقل، v_4متغیر میانجی و v_1متغیر وابسته است. در زبان مدل‌سازی به متغیرهایv_2،v_3 متغیرهای برون‌زا و به متغیرهایv_1،v_4متغیرهای درون‌زا گفته‌می‌شود.(شکل۲)

مدل زیرشبکه اول و دوم شبکه عصبی تشکیل شده از سه لایه (ورودی،پنهان،خروجی) که لایه پنهان دارای دو گره است. لایه ورودی زیرشبکه اول شبکه عصبی مجموعه متغیرهای مستقل v_2،v_3 و لایه خروجی متغیر میانجی v_4 است. لایه ورودی زیرشبکه دوم شبکه عصبی مجموعه متغیرهای مستقل v_2،v_3 و خروجی زیر شبکه قبل v_5 و لایه خروجی متغیر پاسخ v_1است و مدل شبکه عصبی به صورت دو شبکه پشت سرهم ساخته می‌شود.

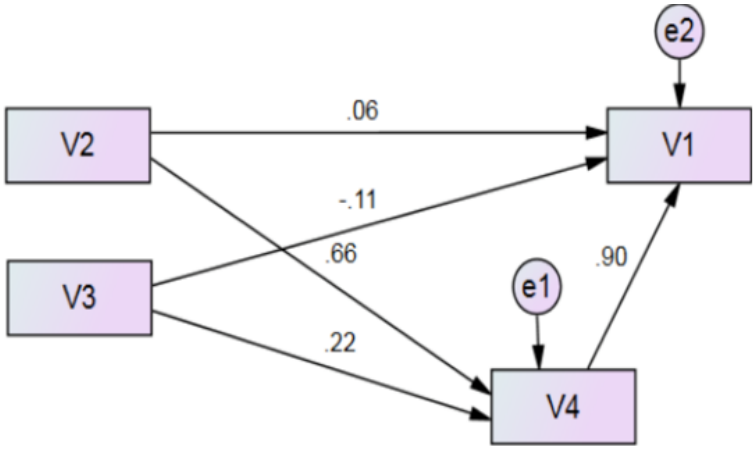
$$v_4 = g_1(b_1 + \sum_j g_j(b_j + \sum_{i=2}^{i=3} v_i w_{ij}) w_{j1}$$
$$v_1 = g_2(b_2 + \sum_j g_j(b_j + (\sum_{i=2}^{i=3} v_i + v_5) w_{ij}) w_{j2}$$

که در آن v_5خروجی زیر شبکه اول و w_{ij}ها وزن‌ها در هرلایه از شبکه‌اند.(شکل۳وشکل۴)

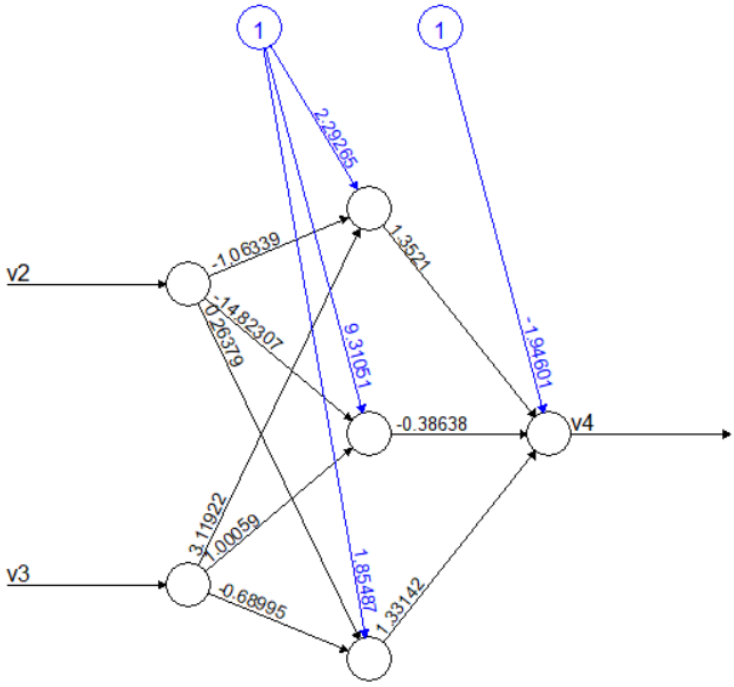
دراین پژوهش درصدد مقایسه یک روش کلاسیک آماری(تحلیل مسیر) با یک روش غیر کلاسک (شبکه عصبی سلسله مراتبی) شدیم. ابتدا روش تحلیل مسیر را روی داده‌های مورد پژوهش پیاده‌سازی کرده‌ایم. باتوجه به خروجی جدول ۱ ، RMSEآزمایش شبکه عصبی ۰.۰۰۷ و RMSEامتحان شبکه عصبی ۰.۰۰۹ همچنین RMSEآزمایش تحلیل مسیر ۰.۶۰۲ و RMSEامتحان تحلیل مسیر برابر است با ۰.۶۵۲. هر دو مدل در دسته مدل‌های فرابراش قرارمی‌گیرند. با توجه به نتایج بدست آمده شبکه عصبی دارای خطای کمتری نسبت به تحلیل مسیر است، بنابراین می‌توان گفت شبکه عصبی سلسله مراتبی عملکرد بهتری نسبت به تحلیل مسیر دارد.

جدول ۱: میانگین مجذور خطا.

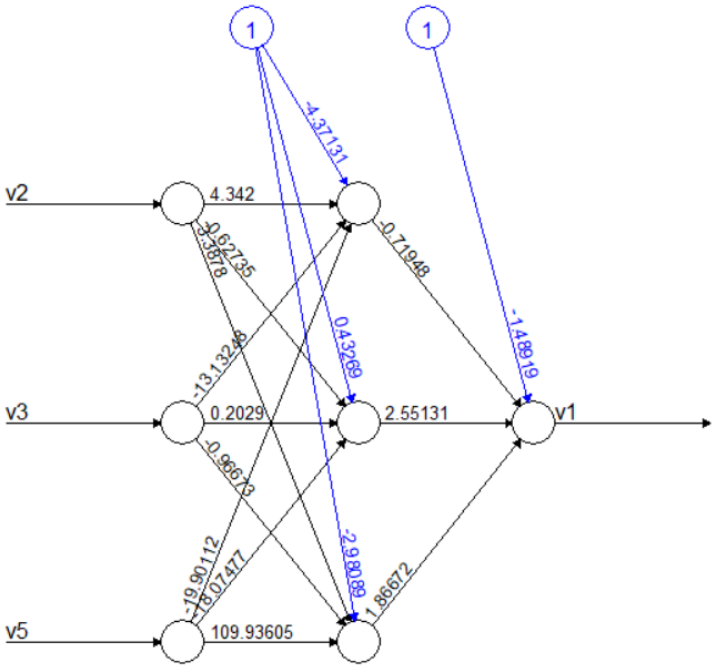
تحلیل مسیر	شبکه عصبی	زیر شبکه دوم شبکه عصبی	زیر شبکه اول شبکه عصبی	
۰.۶۰۲	۰.۰۰۷	۰.۰۸	۰.۰۸	RMSEآموزش
۰.۶۵۲	۰.۰۰۹	۰.۱	۰.۰۷۷	RMSEامتحان



شکل ۲: مدل تحلیل مسیر.



شکل ۳: مدل زیر شبکه اول شبکه عصبی.



شکل ۴: مدل زیر شبکه دوم شبکه عصبی.

۳ نتیجه‌گیری

روش تحلیل مسیر براي مدل‌بندی روابط بین متغیرها داراي تعدادی پیش فرض و محدودیت است. از جمله این محدودیت‌ها می‌توان وجود رابطه خطی بین متغیرهای پیش بین با متغیر وابسته، استقلال خطاها یا غیر همبسته بودن جملات خطای متغیرها اشاره کرد. با توجه به محدودیتهاي ذکر شده براي روش تحلیل مسیر نیاز به روش‌هایی که با محدودیتهاي کمتري در این زمینه مواجه باشند، احساس می‌شود . در این بین، شبکه عصبی می‌تواند یکی از مناسب ترین روش‌ها باشد. این شبکه‌ها برای سیستم‌های پیچیده که مدلسازی این سیستم‌ها یا میسر نیست و یا به سختی انجام می‌شود بسیار مناسب می‌باشند. شبکه‌های عصبی به علت استفاده از فرمول‌های ثابت شده با حداقل خطا، صحت و اعتبار بیشتری دارند. با توجه به تحلیل‌های انجام شده روی داده‌های مورد پژوهش به این نتیجه دست یافتیم که روش شبکه عصبی سلسله مراتبی بر روش تحلیل مسیر ارجح‌تر است. همچنین پیشنهاد می‌شود در تحقیقات بعدی با استفاده از ترکیب دو روش تحلیل مسیر و شبکه عصبی به صورت ایجاد گره و لایه بین مجموعه متغیرهای مستقل و میانجی و ایجاد گره و لایه بین مجموعه متغیرهای مستقل و میانجی با متغیر پاسخ مدل تحلیل مسیر به طور هم زمان، نتایج معتبر و دقیق‌تری را به ارمغان آورد.
اگرچه ما دراین پژوهش از مجموعه داده‌های SPSSاستفاده کرده‌ایم اما می‌توان در تحقیقات بعدی با استفاده از داده‌های مخزن UCI و AZURE و... این دو روش را مورد بررسی قرار داد.

مراجع

[۱] ایوب. شیخی، *تحلیل و مدلسازی آماری*، چاپ اول، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ۱۳۹۷.

[۲] ل. فالست، ترجمه هادی ویسی، کبری مفاخری، سعید باقری شورکی، *مبانی شبکه‌های عصبی مصنوعی: ساختارها، الگوریتم‌ها و کاربردها* ، چاپ چهارم، ۱۳۹۵.

[۳] علی. محمد حسینی، *مقدمه ای بر شبکه عصبی*، ۱۳۸۵.

[۴] محمدباقر. منهاج، *مبانی شبکه های عصبی*، چاپ نهم، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ۱۳۹۳.

[۵] م. هاگان، ها. دیموث، ترجمه سید مصطفی کیا، *طراحی* شبکه عصبی، چاپ پنجم، ۱۳۹۸.

دانشگاه شهید باهنر کرمان، ایران
دهمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن
۲۶ لغایت ۲۹ مرداد ۱۳۹۹
Shahid Bahonar University of Kerman, Iran
Seminar on Linear Algebra and its Applications
August 16 - 19 , 2020

تاثیر عملگرهای ماتریسی بر کاهش زمان تصمیم گیری در بازارهای مالی[۱]

مهدی رضوی*

بخش ریاضی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده

زمان تصمیم گیری یکی از مهمترین عوامل در خرید و فروش اوراق مشتقه در بازارهای مالی می‌باشد. اهمیت این موضوع به حدی است که اختلاف زمانی چند ثانیه ای در فرایند تصمیم گیری می‌تواند باعث ایجاد اختلاف چند صد هزار دلاری در سود یا زیان ناشی از خرید و فروش اوراق مشتقه شود. در این مقاله با معرفی فرم کرونکری به جای فرم ماتریسی برای تقریب جواب قیمت اختیار معامله (تابع قیمت)، نشان می‌دهیم که استفاده از این فرم جدید باعث کاهش چشمگیر زمان تصمیم گیری در تخمین قیمت اختیار معامله می‌شود.

واژه‌های کلیدی: اختیار معامله، ضرب کرونکر، چندجمله ای های متعامد

کد موضوع‌بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 65M70 ،15A06 ،91G60

۱ مقدمه

در اکثر معادلات مالی تابع قیمت $V(s,t)$ یک تابع دو متغیره برحسب دو متغیر قیمت سهام s و زمان t می‌باشد که از حل معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی یا معادلات انتگرالی بدست می‌آید. به عنوان مثال معادله بلک- شولز یکی از مهمترین معادلات مالی برای قیمت گذاری اختیار معامله در دو نوع خرید و فروش است که در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$V_t + \frac{۱}{۲}\sigma^۲ s^۲ V_{ss} + rsV_s - rV = ۰$$

وقتی که r نرخ بهره بدون ریسک و σ میزان نواسانات سهام باشد. از این نوع معادلات می‌توانیم به مدل ها و معادلات مالی هستون و واسیچک نیز اشاره کنیم. در گروه مهمی از روش های عددی برای حل این معادلات (مانند روش طیفی و روش های موجکی) تابع قیمت به عنوان ترکیب خطی متناهی با ضرائب مجهول از توابع متعامد به فرم کلی زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$V(s,t) = \sum_{i,j=۰}^{m} \alpha_i \beta_j L_i(s) L_j(t), \qquad (۱)$$

وقتی که $L_i, L_j;\ i,j = ۰, ۱, ۲, ..., m.$ توابع متعامد هستند. در این مقاله با استفاده از (۱) با معرفی فرم کرونکری به جای فرم ماتریسی برای تقریب تابع قیمت، نشان می‌دهیم که استفاده از این فرم جدید باعث کاهش چشمگیر زمان تصمیم گیری در تخمین قیمت اخیار معامله می‌شود. به عنوان یکی از مهمترین خواص، همواره می‌توانیم مشتقات یک چندجمله ای متعامد را به صورت ترکیب خطی از چندجمله ای های با درجه کمتر بیان کنیم، در نتیجه ما می‌توانیم برای مشتق مراتب مختلف این چندجمله ای ها یک ماتریس مشتق بیان کنیم. در ادامه این مقاله ماتریس های مشتق مراتب اول و دوم چندجمله ای های متعامد را با نمادهای D و $D^۲$ نشان می‌دهیم .

[۱] تقدیم به شادروانان علیرضا افضلی پور و فاخره صبا، بنیانگذاران دانشگاه کرمان

* سخنران. آدرس ایمیل: mrazavi@math.uk.ac.ir

تعریف ۱.۱. ضرب کرونکری ماتریس های $A_{n\times p}$ و $B_{m\times q}$ برابر است با:

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1p}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2p}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{np}B \end{bmatrix}\in M_{nm,pq}.$$

لم ۲.۱. *فرض کنید*

الف) $V_s=\sum_{i,j=0}^{m}\alpha_i\beta_jL_i'(s)L_j(t)=\sum_{i,j=0}^{m}\hat{\alpha}_i\beta_jL_i(s)L_j(t)$

ب) $V_t=\sum_{i,j=0}^{m}\alpha_i\beta_jL_i(s)L_j'(t)=\sum_{i,j=0}^{m}\alpha_i\hat{\beta}_jL_i(s)L_j(t)$. *آنگاه:*

$$a)[\hat{\alpha}\beta]=(D\otimes I))[\alpha\beta].\quad b)[\alpha\hat{\beta}]=(I\otimes D)[\alpha\beta].$$

وقتی‌که

$$[\alpha\beta]:=[\alpha_0\beta_0\ \alpha_0\beta_1\dots\alpha_0\beta_m\mid\dots\mid\alpha_m\beta_0\ \alpha_m\beta_1\dots\alpha_m\beta_m],\quad [\hat{\alpha}\beta]:=[\hat{\alpha}_0\beta_0\ \hat{\alpha}_0\beta_1\dots\hat{\alpha}_0\beta_m\mid\dots\mid\hat{\alpha}_m\beta_0\ \hat{\alpha}_m\beta_1\dots\hat{\alpha}_m\beta_m],$$
$$[\alpha\hat{\beta}]:=[\alpha_0\hat{\beta}_0\ \alpha_0\hat{\beta}_1\dots\alpha_0\hat{\beta}_m\mid\dots\mid\alpha_m\hat{\beta}_0\ \alpha_m\hat{\beta}_1\dots\alpha_m\hat{\beta}_m].$$

لم ۳.۱. *فرض کنید*

الف) $V_{ss}=\sum_{i,j=0}^{m}\alpha_i\beta_jL_i''(s)L_j(t)=\sum_{i,j=0}^{m}\hat{\hat{\alpha}}_i\beta_jL_i(s)L_j(t)$

ب) $V_{tt}=\sum_{i,j=0}^{m}\alpha_i\beta_jL_i(s)L_j'(t)=\sum_{i,j=0}^{m}\alpha_i\hat{\hat{\beta}}_jL_i(s)L_j(t)$.

ج) $V_{st}=\sum_{i,j=0}^{m}\alpha_i\beta_jL_i'(s)L_j'(t)=\sum_{i,j=0}^{m}\hat{\alpha}_i\hat{\beta}_jL_i(s)L_j(t)$. *آنگاه:*

$$a)[\hat{\hat{\alpha}}\beta]=(D^2\otimes I))[\alpha\beta].\quad b)[\alpha\hat{\hat{\beta}}]=(I\otimes D^2)[\alpha\beta].\quad c)[\hat{\alpha}\hat{\beta}]=(D\otimes D)[\alpha\beta].$$

وقتی‌که

$$[\hat{\hat{\alpha}}\beta]:=[\hat{\hat{\alpha}}_0\beta_0\ \hat{\hat{\alpha}}_0\beta_1\dots\hat{\hat{\alpha}}_0\beta_m\mid\dots\mid\hat{\hat{\alpha}}_m\beta_0\ \hat{\hat{\alpha}}_m\beta_1\dots\hat{\hat{\alpha}}_m\beta_m],\quad [\alpha\hat{\hat{\beta}}]:=[\alpha_0\hat{\hat{\beta}}_0\ \alpha_0\hat{\hat{\beta}}_1\dots\alpha_0\hat{\hat{\beta}}_m\mid\dots\mid\alpha_m\hat{\hat{\beta}}_0\ \alpha_m\hat{\hat{\beta}}_1\dots\alpha_m\hat{\hat{\beta}}_m],$$
$$[\hat{\alpha}\hat{\beta}]:=[\hat{\alpha}_0\hat{\beta}_0\ \hat{\alpha}_0\hat{\beta}_1\dots\hat{\alpha}_0\hat{\beta}_m\mid\dots\mid\hat{\alpha}_m\hat{\beta}_0\ \hat{\alpha}_m\hat{\beta}_1\dots\hat{\alpha}_m\hat{\beta}_m].$$

۲ بررسی فرم های ماتریسی تابع قیمت و مشتقات آن :

در این بخش ابتدا به معرفی فرم های نمایش تقریب تابع قیمت (۱) و مشتقات آن خواهیم پرداخت، سپس در ادامه به مقایسه زمان اجرای این فرم ها با استفاده از نرم افزار متلب به ازای مقادیر متفاوت m خواهیم پرداخت. در روش های عددی که تقریب تابع قیمت به صورت (۱) می‌باشد محاسبه ضرائب مجهول $\alpha_i\beta_j,\ i,j=0,1,2,...,m$ منجر به حل یک دستگاه خطی مربی $(m+1)^2$ مجهولی می‌گردد، لذا به عنوان اولین قدم لازم است جواب (۱) به فرم ماتریسی بیان گردد.

۱.۲ فرم ماتریسی استاندارد تقریب تابع قیمت و مشتقات تابع قیمت

فرم ماتریسی استاندارد تقریب تابع قیمت به فرم (۱) و مشتقات آن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$V=\sum_{i,j=0}^{m}\alpha_i\beta_jL_i(s)L_j(t)=[L_0(s)L_0(t)\dots L_0(s)L_m(t)\mid\dots\mid[L_m(s)L_0(t)\dots L_m(s)L_m(t)]\begin{bmatrix}\alpha_0\beta_0\\ \alpha_0\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_m\beta_{m-1}\\ \alpha_m\beta_m\end{bmatrix}=(L(s)[\alpha]^t)(L(t)[\beta]^t).\quad (۲)$$

$$\frac{\partial^nV}{\partial s^n}=(L(s)D^n[\alpha]^t)(L(t)[\beta]^t),\quad \frac{\partial^nV}{\partial t^n}=(L(s)[\alpha]^t)(L(t)D^n[\beta]^t),\quad n=1,2.\quad \frac{\partial^2V}{\partial t\partial s}=(L(s)D[\alpha]^t)(L(t)D[\beta]^t).\quad (۳)$$

وقتی‌که:

$$L(x)=[L_0(x)L_1(x)\dots L_m(x)],\quad [\alpha]=[\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_m],\quad [\beta]=[\beta_0\beta_1\dots\beta_m].$$

۲.۲ فرم ماتریسی کرونکری تقریب تابع قیمت و مشتقات تابع قیمت

فرم ماتریسی کرونکری تقریب تابع قیمت به فرم (۱) و مشتقات آن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$V = \sum_{i,j=0}^{m} \alpha_i \beta_j L_i(s) L_j(t) = (L(s) \otimes L(t)) \times ([\alpha] \otimes [\beta])^t. \tag{۴}$$

$$\frac{\partial^n V}{\partial s^n} = (L(s) \otimes L(t))(D^n \otimes I)([\alpha] \otimes [\beta])^t, \quad \frac{\partial^n V}{\partial t^n} = (L(s) \otimes L(t))(D^n \otimes I)(I \otimes D^n)([\alpha] \otimes [\beta])^t, \quad n = 1, 2. \tag{۵}$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial s \partial t} = (L(s) \otimes L(t))(D \otimes D)([\alpha] \otimes [\beta])^t.$$

۳ مقایسه زمانی

برای محاسبه تقریب تابع قیمت به فرم (۱) در یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم دو بعدی مالی مانند معادله بلک - شولز به تعداد قابل ملاحضه ای نیاز به استفاده از فرم های ماتریسی تابع قیمت و مشتقات آن می‌باشد، لذا زمان اجرای این فرم ها یکی از تاثیرگذارترین موارد در مدت زمان کل اجرای این روش های عددی می‌باشد. در این بخش با استفاده از نرم افزار متلب زمان اجرای فرم های ماتریسی ارائه شده در بخش قبل به ازای m های مختلف (فقط برای یک تکرار) را محاسبه و با هم مقایسه می‌کنیم. نتایج زمانی را در جدول مشاهده می‌کنید:

جدول ۱: زمان اجرای فرم ماتریس استاندارد و کرونکری بر حسب ثانیه

m	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	...	۱۵	...	۲۰	...	۳۰
زمان اجرای فرم ماتریسی استاندارد	۴۲۸۷.۰	۸۵۶.۰	۴۶۳۲.۱	۳۶۴۹.۲	۴۸۴۴.۳	۰۴۵۳.۵	۹۲۱۳.۷	۷۰۱۴.۱۰	...	۷۷۷۱.۳۱	...	۵۸۴۹.۹۱	...	۲۳۰۳.۵۶۴۸
زمان اجرای فرم ماتریسی کرونکری	۱۶۹۸.۰	۲۶۴۲.۰	۳۲۰۹.۰	۵۳۸۲.۰	۵۳۵۵.۰	۶۶۸۰.۰	۸۵۲۸.۰	۱۴۵۷.۱	...	۳۴۱۶.۲	...	۵۷۸.۴	...	۱۶۲۶.۱۶۰
تفاوت زمان اجرای دو روش	۲۵۸۹.۰	۵۹۱۸.۰	۱۴۳۲.۱	۸۲۶۷.۱	۹۴۸۹.۲	۳۷۷۳.۴	۰۶۸۵.۷	۵۵۵۷.۹	...	۴۳۵۵.۲۹	...	۰۰۶۹.۸۷	...	۰۶۷۷.۵۴۸۸

با توجه به نتایج زمانی بدست آمده می‌توان نتیجه گرفت که زمان اجرای فرم ماتریسی کرونکری بسیار کمتر از فرم ماتریسی استاندارد می‌باشد. همچنین اختلاف زمانی دو فرم نشان می‌دهد که این اختلاف زمانی دارای روند نمایی می‌باشد.

۴ نتیجه گیری

با توجه به اینکه فرم ماتریسی تابع قیمت و فرم کرونکری در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مالی بسیار مورد استفاده است، استفاده از فرم ماتریسی کرونکری به جای فرم ماتریسی استاندارد باعث کاهش چشمگیر زمان حل عددی این معادلات شده و در نتیجه باعث کاهش زمان تصمیم گیری در بازارهای مالی می‌شود.

مراجع

[1] P. Bradimarte, *Numerical Method in Finance and Economics*, John Wiley Press, 2006.

[2] F. Chen, J. Shen and H. Yu, A New Spectral Element Method for Pricing European Options Under the Black-Scholes and Merton Jump Diffusion Models, *Journal of Scientific Computing*, 52 (2012), 499–518.

[3] M. Radjabalipour, K. Seddighi and Y. Taghavi, Additive mappings on operator algebras preserving absolute values, *Linear Algebra Appl.*, 327 (2001), 197–206.

دانشگاه شهید باهنر کرمان، ایران
دهمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن
۲۶ لغایت ۲۹ مرداد ۱۳۹۹
10
Shahid Bahonar University of Kerman, Iran
Seminar on Linear Algebra and its Applications
August 16 - 19 , 2020

پیش‌شرط پارامتری شامل ماتریس مکمل شور برای مسئله نقطه زینی نامتقارن با بلوک $(۱,۱)$ معین‌مثبت[۱]

امین رفیعی، معصومه یادگاری و هانیه رجبی*

بخش ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری

چکیده

در این مقاله، ابتدا یک روش تکراری ساکن پارامتری برای حل مسئله نقطه زینی معرفی و شرایط همگرایی آن بررسی می‌شود. از این روش تکراری یک پیش‌شرط برای مسئله نقطه زینی استخراج می‌شود که شامل ماتریس مکمل شور است و خواص طیفی آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. این پیش شرط به عنوان پیش شرط راست برای دستگاه نقطه زینی به کار رفته و سپس دستگاه پیش‌شرط شده با روش شروع مجدد GMRES حل خواهد شد. در بخش نتایج عددی کیفیت پیش‌شرط جدید با پیش‌شرط‌های HSS، RHSS و REHSS مقایسه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مسئله نقطه زینی، معادلات ناویر-استوکس، پیش شرط‌های HSS، REHSS

کد موضوع‌بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 35Q30، 65F10، 65F08

۱ مقدمه

بسیاری از مسائل فیزیکی منجر به حل دستگاه معادلات خطی تنک و بزرگ می‌شود. معادلات استوکس

$$\begin{aligned} -v\Delta u + \nabla p &= f \quad in\,\Omega \\ \nabla . u &= 0 \quad in\,\Omega \\ u(x) &= 0 \quad on\,\Omega \end{aligned} \tag{۱}$$

را در نظر بگیرید. این معادلات، مدل‌سازی یک سیال تراکم ناپذیر نیوتنی در حالت ایستا را نشان می‌دهند. این معادلات از نوع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم هستند. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ناحیه‌ای کران‌دار و $\partial\Omega$ مرز این ناحیه بوده که قطعه قطعه هموار و $d = ۲,۳$ است. Δ عملگر لاپلاسین در $\mathbb{R}^d$ ، ∇ عملگر گرادیان و $\nabla .$ عملگر دیورژانس است. v ضریب لزجت دینامیکی است. مجهولات مسئله (۱) میدان سرعت $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$ و میدان فشار $p : \Omega \to \mathbb{R}$ می‌باشند. با استفاده از روش تفاضلات متناهی یا عناصر متناهی، معادله (۱) پس از گسسته سازی تبدیل به دستگاه معادلات خطی

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A & B^T \\ -B & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{u} = \underbrace{\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}}_{b} \tag{۲}$$

خواهد شد که آن را مسئله‌ی نقطه زینی می‌نامند. در رابطه (۲) ، $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس نامنفرد، متقارن و معین مثبت بوده و $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ماتریس مستطیلی است که $rank(B) = m < n$. در این شرایط، ماتریس $\mathcal{A}$ نیز نامنفرد خواهد شد [۱].

در این مقاله، ابتدا پیش‌شرط‌های HSS [۱]، RHSS [۲] و REHSS [۳] برای مسئله نقطه زینی را یادآوری و سپس پیش شرط جدیدی با عنوان NRHSS [۲] را ارائه می‌نمائیم.

---

[۱] تقدیم به شادروانان علیرضا افضلی پور و فاخره صبا، بنیانگذاران دانشگاه کرمان

* سخنران. آدرس ایمیل: haniyerajabi@yahoo.com

[2] New Relaxed Hermitian and skew-Hermitian splitting

۲ پیش‌شرط‌های HSS و REHSS و REHSS

برای مساله نقطه زینی (۲) شکاف

$$\mathcal{A} = H + S,$$

را در نظر بگیرید که در آن H و S به‌ترتیب بخش هرمیتی و هرمیتی‌کج $\mathcal{A}$ هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$H = \frac{۱}{۲}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*) = \begin{bmatrix} A & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad و \quad S = \frac{۱}{۲}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*) = \begin{bmatrix} ۰ & B^T \\ -B & ۰ \end{bmatrix}.$$

با استفاده از این شکاف، روش تکراری دو مرحله ای HSS به صورت

$$\begin{cases} (\alpha I + H)X^{k+\frac{۱}{۲}} = b + (\alpha I - S)X^k, \\ (\alpha I + S)X^{k+۱} = b + (\alpha I - H)X^{k+\frac{۱}{۲}}, \end{cases}$$

خواهد بود [۱]. شکاف

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & \frac{۱}{\alpha}AB^T \\ -B & ۰ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ & (\frac{۱}{\alpha}A - I)B^T \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix},$$

برای مساله (۲) پیش شرط REHSS به صورت

$$P_{RHSS} = \begin{bmatrix} A & \frac{۱}{\alpha}AB^T \\ -B & ۰ \end{bmatrix},$$

را ارائه می نماید [۲]. با استفاده از شکاف

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & AB^T \\ -B & \alpha I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ & (A - I)B^T \\ ۰ & \alpha I \end{bmatrix}$$

برای مساله (۲) می توان پیش شرط REHSS که برابر

$$P_{REHSS} = \begin{bmatrix} A & AB^T \\ -B & \alpha I \end{bmatrix}$$

می باشد را معرفی نمود [۳].

۳ پیش‌شرط پارامتری جدید برای حل مسئله نقطه زینی

پیش‌شرط جدید پارامتری

$$P_{NRHSS} = \begin{bmatrix} A & B^T \\ -B(I + \frac{۱}{\alpha}A) & ۰ \end{bmatrix} \tag{۳}$$

برای مسئله نقطه زینی (۲) را در نظر بگیرید که α یک عدد ثابت مثبت است. تفاضل بین ماتریس ضرایب $\mathcal{A}$ و پیش‌شرط P_{NRHSS} به‌صورت زیر است

$$R_{NRHSS} = P_{NRHSS} - \mathcal{A} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ -\frac{۱}{\alpha}BA & ۰ \end{bmatrix}. \tag{۴}$$

در رابطه (۴) هراندازه α بزرگ‌تر باشد ماتریس پیش‌شرط تقریب بهتری برای ماتریس ضرایب $\mathcal{A}$ خواهدبود. برمبنای رابطه (۴) می توان شکاف زیر را برای ماتریس ضرایب $\mathcal{A}$ معرفی کرد

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B^T \\ -B(I + \frac{۱}{\alpha}A) & ۰ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ -\frac{۱}{\alpha}BA & ۰ \end{bmatrix}.$$

با استفاده از این شکاف، روش تکراری جدیدی برای حل مسئله نقطه زینی (۲) به‌صورت

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ -B(I+\frac{1}{\alpha}A) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{\alpha}BA & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \tag{۵}$$

می‌سازیم. در ادامه شرایط همگرایی این روش تکراری بررسی خواهد شد. این روش تکراری جدید را $NRHSS$ می‌نامیم. ماتریس پیش شرط (۳) به صورت بلوکی

$$P_{NRHSS} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -B(I+\frac{1}{\alpha}A) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B(A^{-1}+\frac{1}{\alpha}I)B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B^T \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

قابل تجزیه است. ماتریس معین مثبت $W = B(A^{-1}+\frac{1}{\alpha}I)B^T$ را در نظر بگیرید. بخش $BA^{-1}B^T$ از ماتریس W ، ماتریس مکمل شور نظیر به ماتریس $\mathcal{A}$ می‌باشد. معکوس بلوکی ماتریس پیش شرط P_{NRHSS} برابر

$$\begin{aligned} P_{NRHSS}^{-1} &= \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B^T \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & W^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ B(I+\frac{1}{\alpha}A) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^{-1} - A^{-1}B^TW^{-1}B(I+\frac{1}{\alpha}A)A^{-1} & -A^{-1}B^TW^{-1} \\ W^{-1}B(I+\frac{1}{\alpha}A)A^{-1} & W^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۶}$$

خواهد بود. طبق رابطه (۵) ماتریس تکرار روش جدید برابر

$$\begin{aligned} \Gamma_{NRHSS} &= P_{NRHSS}^{-1}R_{NRHSS} \\ &= \begin{bmatrix} A^{-1} - A^{-1}B^TW^{-1}B(I+\frac{1}{\alpha}A)A^{-1} & -A^{-1}B^TW^{-1} \\ W^{-1}B(I+\frac{1}{\alpha}A)A^{-1} & W^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{\alpha}BA & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}A^{-1}B^TW^{-1}BA & 0 \\ -\frac{1}{\alpha}W^{-1}BA & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

است.

قضیه ۱.۳. *فرض کنید A و B ماتریس‌های تعریف‌شده در مسئله نقطه زینی (۲) باشند. طبق رابطه (۵) ماتریس تکرار روش $NRHSS$ به‌صورت زیر است*

$$\Gamma_{NRHSS} = \begin{bmatrix} A & B^T \\ -B(I+\frac{1}{\alpha}A) & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{\alpha}BA & 0 \end{bmatrix}.$$

فرض کنید μ_m بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس $F = B^TW^{-1}B$ باشد که $W = B(A^{-1}+\frac{1}{\alpha}I)B^T$. در این صورت اگر $\alpha > \max\{\mu_m, 0\}$ آنگاه $\rho(\Gamma_{NRHSS}) < 1$.

لم ۲.۳. *پیش شرط P_{NRHSS} را در نظر بگیرید. در این صورت ماتریس پیش‌شرط شده راست $\mathcal{A}P_{NRHSS}^{-1}$ دارای مقادیر ویژه یک از مرتبه حداقل n است. بقیه مقادیر ویژه‌ی این ماتریس به صورت λ است که λ مقدار ویژه‌ی ماتریس $(BA^{-1}B^T)W^{-1}$ است.*

نتیجه ۳.۳. *هر اندازه α بزرگ‌تر باشد، ماتریس $(BA^{-1}B^T)W^{-1}$ به همانی $m \times m$ نزدیک‌تر بوده و در نتیجه پیش‌شرط P_{NRHSS} ، پیش‌شرط راست بهتری برای دستگاه نقطه زینی خواهد بود.*

۴ پیاده‌سازی پیش‌شرط P_{NRHSS}

پس از ساخت پیش‌شرط P_{NRHSS} باید دستگاه پیش‌شرط شده راست $(\mathcal{A}P_{NRHSS}^{-1})(\underbrace{P_{NRHSS}u}_{t}) = b$ نظیر به مسئله‌ی نقطه زینی (۲) را تشکیل داده و سپس این دستگاه جدید را با روش GMRES حل کرد. در هر مرحله از این فرایند

نیاز به محاسبه‌ی بردار Y به صورت $Y = P_{NRHSS}^{-1}X$ داریم. فرض کنید $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ و $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ، که در آن $x_1, y_1 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ و $x_2, y_2 \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. در این صورت با استفاده از رابطه (۶) خواهیم داشت

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & -A^{-1}B^T \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & W^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ B(I+\frac{1}{\alpha}A) & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix}}_{P_{NRHSS}^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{Y}. \qquad (۷)$$

برای محاسبه بردار Y مطابق با رابطه (۷) باید مراحل زیر انجام شود:

۱. دستگاه $Aw_1 = x_1$ را حل کنید.

۲. بردار $w_2 = B(I + \frac{1}{\alpha}A)w_1 + x_2$ را محاسبه کنید.

۳. دستگاه $Wy_2 = w_2$ را حل کنید.

۴. قرار دهید $z = B^T y_2$ و دستگاه $As = z$ را حل کنید.

۵. بردار $y_1 = w_1 - s$ را محاسبه کنید.

چون ماتریس A معین مثبت است برای حل دستگاه $Aw_1 = x_1$ و $As = z$ در مراحل ۱ و ۴ می توان از تجزیه چولسکی استفاده کرد. مرحله ۳ را در نظر بگیرید. محاسبه ماتریس $W = B(A^{-1} + \frac{1}{\alpha}I)B^T$ به دلیل وجود A^{-1} حجم محاسبات بالایی نیاز دارد. برای جلوگیری از محاسبه صریح A^{-1} به شکل زیر عمل کرده‌ایم.

۱. فرض‌کنید $A = L_1 L_1^T$ تجزیه چولسکی ماتریس A باشد. همچنین فرض‌کنید D ماتریس قطری باشد که عناصر قطری آن برابر عناصر قطری ماتریس L_1 هستند. با استفاده از این تعریف می‌توان تجزیه چولسکی A را به شکل $A = LD^2L^T$ بازنویسی کرد که L یک ماتریس پایین مثلثی واحد است. ماتریس E را برابر $E = I - L$ تعریف می‌کنیم. در این صورت با استفاده از سری نویمان [۵] خواهیم داشت

$$L^{-1} = (I - E)^{-1} = I + E + E^2 + \cdots$$

بنابراین به ازای عدد صحیح مثبتی نظیر p می توان A^{-1} را به شکل زیر تقریب زد

$$A^{-1} = (L^{-1})^T D^{-2} L^{-1} \approx \underbrace{(I + E + E^2 + \cdots + E^p)^T D^{-2}(I + E + E^2 + \cdots + E^p)}_{\tilde{A}}$$

که $\tilde{A}$ نیز معین مثبت است. سپس از این تقریب استفاده کرده و تقریب معین مثبت از ماتریس W به شکل

$$W \approx B(\tilde{A} + \frac{1}{\alpha}I)B^T = \tilde{W}$$

را محاسبه خواهیم کرد. با استفاده از این تکنیک می توان در گام سوم به جای حل دستگاه $Wy_2 = w_2$ دستگاه $\tilde{W}y_2 = w_2$ را با استفاده از تجزیه چولسکی حل کرد.

۲. دستگاه $Wy_2 = w_2$ را با استفاده از روش CG حل خواهیم کرد. برای این منظور در هرگام نیاز به محاسبه‌ی حاصل‌ضرب Wv خواهیم داشت که v یک بردار می‌باشد. Wv به شکل

$$Wv = BA^{-1}B^T v + \frac{1}{\alpha}BB^T v,$$

است. فرض کنید $z = B^T v$. درنتیجه

$$Wv = BA^{-1}z + \frac{1}{\alpha}Bz$$

اگر $t = A^{-1}z$ ، آنگاه $At = z$. بنابراین می‌توان بردار t را با استفاده از تجزیه چولسکی A محاسبه کرد. دستگاه پیش‌شرط شده راست $(\mathcal{A}P_{NRHSS}^{-1})\underbrace{(P_{NRHSS}u)}_{t} = b$ با استفاده از برنامه روش FGMRES در محیط نرم افزار MATLAB حل گردیده است.

۵ نتایج عددی

دراین بخش با ارائه یک مثال عددی کارایی برخی پیش شرط‌های معرفی شده برای مساله نقطه زینی را مقایسه می کنیم. مسئله استوکس مورد بحث، مسئله جریان در حفره با درپوش متحرک است. برای گسسته سازی این مسئله‌ی استوکس به روش عناصر متناهی از المان $Q_2 - P_1$ استفاده کرده و ماتریس ضرایب مسئله ی نقطه زینی را با استفاده از نرم‌افزار IFISS می سازیم [۴]. شبکه‌هایی که انتخاب شده است برابر 8×8، 16×16، 32×32، 64×64 و 128×128 می‌باشند. برای هر یک از دستگاه‌های نقطه زینی، پیش‌شرط‌های P_{HSS} ، P_{RHSS} ، P_{REHSS} و P_{NRHSS} محاسبه‌شده و سپس به‌عنوان پیش‌شرط راست مورداستفاده قرارگرفته‌اند. هر یک از این پیش‌شرط‌ها با پارامتر α برابر 10^4 ، 10^2 ، 10 ، 1 ، 10^{-1} ، 10^{-2} ، 10^{-4} محاسبه شده‌اند. سپس دستگاه‌های پیش‌شرط شده با استفاده از روش GMRES[۵۰] حل شده است. بردار جواب دقیق در تمام مسائل نقطه زینی برابر بردار $e = [1, \cdots, 1]^T$ انتخاب گردیده است. همچنین، بردار اولیه‌ی روش GMRES[۵۰] بردار صفر است. شرط توقف روش GMRES[۵۰] به‌صورت $\frac{\|r_k\|_2}{\|b\|_2} \leq 10^{-12}$ درنظرگرفته شده که r_k مانده k ام است. حداکثر تعداد تکرارهای روش GMRES[۵۰] برابر ۵۰۰ انتخاب شده است. جدول ۱ نظر تعداد تکرار و زمان اجرای روش GMRES[۵۰] برای مسئله جریان در حفره با درپوش متحرک به ازای شبکه‌های 8×8، 16×16، 32×32، 64×64 و 128×128 را نشان می‌دهد. ستون CPU شامل زمان اجرای برنامه برحسب ثانیه می باشد. همچنین نماد $+$ نشان می دهد که روش GMRES[۵۰] در ۵۰۰ تکرار همگرا نشده است. سطرهای P_{NRHSS1} و P_{NRHSS2} به ترتیب اطلاعات مربوط به پیاده سازی نوع اول و دوم پیش شرط P_{NRHSS} است که در بخش قبلی شرح داده شده است. همچنین، اطلاعات مربوط به پیش‌شرط P_{NRHSS2} نظیر به حالتی است که تنها ۱۰ تکرار از روش CG مورد استفاده قرار گرفته است. برای درج اطلاعات مربوط به پیش‌شرط P_{NRHSS1} عدد p برابر ۳ درنظر گرفته شده است.

تمام آزمایش‌های عددی این بخش برروی کامپیوتر شخصی با حافظه‌ی دسترسی تصادفی ۱۲ گیگابایت در محیط نرم افزار MATLAB اجرا گردیده است. نتایج حاصل از اطلاعات جدول به شرح زیر است:

۱. به ازای شبکه 128×128 و به ازای تمامی مقادیر α ، پیش شرط P_{NRHSS2} به دلیل مرتبه زمانی بالا قادر به حل هیچ یک از دستگاه‌های پیش شرط شده نبوده است. به همین دلیل در آخرین سطر جدول علامت + درج گردیده است.

۲. به ازای $\alpha \geq 1$ و برای تمامی شبکه‌ها، تعداد تکرارهای پیش شرط $NRHSS2$ از بقیه پیش شرط‌ها بهتر است. به جز در شبکه 64×64 و برای $\alpha = 1$ پیش شرط $REHSS$ تعداد تکرارهای بهتری در مقایسه با بقیه پیش شرط‌ها دارد.

۳. به ازای $\alpha < 1$ و برای تمامی شبکه‌ها، تعداد تکرارهای پیش‌شرط $REHSS$ از بقیه پیش‌شرط‌ها بهتر است. البته در شبکه 16×16 و به ازای $\alpha = 10^{-1}$ ، تعداد تکرارهای پیش‌شرط HSS از بقیه پیش شرط‌ها بهتر است.

۴. به جز شبکه 128×128 ، همواره پیش شرط $NRHSS2$ از نظر تعداد تکرارها از پیش‌شرط $NRHSS1$ بهتر عمل می کند.

۵. در هر ستون مقایسه زمان‌ها نشان می دهد که تفاوت خاصی بین مرتبه‌های زمانی پیش‌شرط‌ها وجود ندارند. البته استثناهایی وجود دارد. به عنوان مثال در مورد شبکه 16×16 و به ازای $\alpha = 10^{-4}$ ، مرتبه زمانی پیش‌شرط $REHSS$ بهتر از بقیه پیش‌شرط‌ها است. در مورد شبکه 32×32 و به ازای $\alpha = 10^{+4}$ مرتبه زمانی پیش‌شرط $NRHSS2$ بهتر از بقیه پیش‌شرط‌ها است. به طور کلی نتایج نشان می دهد که هیچ پیش شرطی به طور دقیق و مطلق مرتبه زمانی بهتری نسبت به بقیه ندارد.

جدول ۱: نتایج روش $FGMRES(۵۰)$ برای حل دستگاه‌های نقطه زینی پیش شرط شده‌ی حاصل از مساله جریان در حفره با درپوش متحرک به ازای شبکه‌ها و مقادیر α متفاوت

		$\alpha = ۱۰^{-۴}$		$\alpha = ۱۰^{-۲}$		$\alpha = ۱۰^{-۱}$		$\alpha = ۱$		$\alpha = ۱۰^{۱}$		$\alpha = ۱۰^{۲}$		$\alpha = ۱۰^{۴}$	
mesh	Preconditioner	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU
۸×۸	P_{HSS}	۳۴	$۵/۶۸e-۰۴$	۳۴	$۵/۷e-۰۶$	۲۹	$۲/۴۵e-۰۶$	۵۳	$۷/۶e-۰۶$	۳۹۹	$۲/۱e-۰۶$	+	+	+	+
	P_{RHSS}	۲۶	$۱/۱۹e-۰۴$	۲۱	$۴/۵۲e-۰۵$	۱۹	$۵/۹۲e-۰۵$	۱۹	$۳/۲۸e-۰۴$	۲۱	$۸/۲e-۰۶$	۲۴	$۱/۱۴e-۰۵$	۳۰	$۱/۸e-۰۶$
	P_{REHSS}	۱۶	$۱/۸۱e-۰۴$	۱۵	$۴/۷۸۵e-۰۵$	۱۵	$۶/۹۵e-۰۵$	۱۶	$۲/۲۷e-۰۴$	۱۷	$۹/۱e-۰۶$	۱۸	$۱/۳e-۰۵$	۲۰	$۱/۸e-۰۶$
	$P_{NREHSS۱}$	۲۴	$۱/۶۲e-۰۴$	۲۲	$۴/۱۴e-۰۵$	۲۰	$۵/۱۳e-۰۵$	۱۶	$۲/۵۱e-۰۴$	۱۲	$۷/۵e-۰۶$	۱۱	$۱/۲۲e-۰۵$	۱۱	$۱/۷e-۰۶$
	$P_{NREHSS۲}$	۲۰	$۵/۳۹e-۰۴$	۱۷	$۸e-۰۶$	۱۶	$۱/۹۲e-۰۵$	۱۲	$۱/۰۲e-۰۵$	۶	$۲/۹e-۰۶$	۳	$۳/۷e-۰۶$	۲	$۱/۸۴e-۰۵$
۱۶×۱۶	P_{HSS}	۷۷	$۱/۷۵e-۰۴$	۷۶	$۴/۹۳e-۰۵$	۷	$۷/۰۹e-۰۵$	۲۱۴	$۴/۵۳e-۰۴$	+	+	+	+	+	+
	P_{RHSS}	۸۸	$۱/۸۵e-۰۴$	۵۵	$۳/۶۴e-۰۴$	۳۹	$۱/۰۹e-۰۵$	۳۸	$۷/۶۷e-۰۵$	۵۲	$۸e-۰۶$	۱۴۷	$۹/۴e-۰۶$	+	+
	P_{REHSS}	۲۶	$۲/۶e-۰۶$	۲۵	$۱/۴۳e-۰۵$	۲۱	$۶/۹e-۰۶$	۲۰	$۲/۱۴e-۰۵$	۲۰	$۲/۱e-۰۶$	۲۱	$۱/۷۳e-۰۵$	۲۳	$۱/۳۲e-۰۵$
	$P_{NREHSS۱}$	۶۰	$۱/۴۴e-۰۴$	۵۵	$۴/۹۵e-۰۵$	۳۹	$۴/۶۲e-۰۵$	۲۵	$۲/۵۵e-۰۴$	۱۸	$۱/۳۹e-۰۵$	۱۷	$۱/۱۱e-۰۵$	۱۷	$۲e-۰۶$
	$P_{NREHSS۲}$	۳۲	$۱/۴۱e-۰۴$	۲۷	$۵/۵۳e-۰۵$	۲۴	$۴/۵۴e-۰۵$	۱۴	$۳/۵۸e-۰۴$	۶	$۸e-۰۶$	۳	$۱/۱۵e-۰۵$	۲	$۱/۹e-۰۶$
۳۲×۳۲	P_{HSS}	+	+	+	+	۹۸	$۶/۲۲e-۰۵$	+	+	+	+	+	+	+	+
	P_{RHSS}	+	+	۲۴۰	$۵/۴۷e-۰۵$	۱۲۶	$۶/۴۵e-۰۵$	۱۱۹	$۲/۷۸e-۰۴$	۳۲۸	$۱/۳۷e-۰۵$	+	+	+	+
	P_{REHSS}	۴۶	$۱/۸۳e-۰۵$	۲۷	$۱/۸۶e-۰۵$	۲۱	$۳/۵e-۰۵$	۱۹	$۱e-۰۵$	۲۱	$۸/۳e-۰۶$	۲۲	$۲/۳۴e-۰۵$	۲۴	$۳/۸۶e-۰۵$
	$P_{NREHSS۱}$	۲۱۹	$۳/۷۸e-۰۴$	۱۵۴	$۸/۶e-۰۶$	۹۰	$۲/۱۶e-۰۵$	۵۵	$۱/۷۳e-۰۷$	۲۸	$۱/۸e-۰۵$	۲۵	$۴e-۰۶$	۲۵	$۱/۵۹e-۰۵$
	$P_{NREHSS۲}$	۵۹	$۱/۸۲e-۰۴$	۵۰	$۷/۸۳e-۰۵$	۳۴	$۶/۹۶e-۰۵$	۱۴	$۲/۸۷e-۰۴$	۶	$۱/۱۲e-۰۵$	۳	$۱/۵۳e-۰۵$	۲	$۳/۲e-۰۷$
۶۴×۶۴	P_{HSS}	+	+	+	+	۳۵۹	$۳/۲e-۰۶$	۲۶۲	$۳/۳e-۰۶$	+	+	+	+	+	+
	P_{RHSS}	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	P_{REHSS}	۹۹	$۱/۶۵e-۰۵$	۲۰	$۲/۲e-۰۶$	۱۱	$۲e-۰۶$	۱۱	$۲/۹e-۰۶$	۱۱	$۲/۷e-۰۶$	۱۲	$۲/۱e-۰۶$	۱۳	$۲/۷e-۰۶$
	$P_{NREHSS۱}$	+	+	+	+	+	+	۱۵۷	$۳/۶۴e-۰۴$	۵۷	$۲/۰۴e-۰۵$	۵۵	$۲/۰۳e-۰۵$	۵۵	$۳/۳e-۰۶$
	$P_{NREHSS۲}$	۱۱۴	$۱/۸۳e-۰۴$	۸۱	$۹/۳۸e-۰۵$	۴۰	$۹/۴۸e-۰۵$	۱۴	$۴/۱e-۰۴$	۵	$۱/۷۱e-۰۵$	۳	$۱/۷e-۰۵$	۲	$۲/۳e-۰۶$
۱۲۸×۱۲۸	P_{HSS}	+	+	+	+	+	+	۴۵۰	$۴/۳e-۰۵$	+	+	+	+	+	+
	P_{RHSS}	+	+	+	+	+	+	۲۰۴	$۵/۵۴e-۰۴$	۱۶۳	$۱/۱e-۰۴$	۱۷۱	$۱/۸e-۰۴$	۲۵۹	$۱/۶۳e-۰۴$
	P_{REHSS}	۴۲	$۲/۷۹e-۰۵$	۱۰	$۱/۲۸e-۰۵$	۷	$۲/۶۱e-۰۵$	۶	$۸/۶۵e-۰۵$	۶	$۲/۶۱e-۰۵$	۶	$۲/۸e-۰۵$	۷	$۲/۸e-۰۶$
	$P_{NREHSS۱}$	۲۶۳	$۲/۸۲e-۰۵$	۱۹۶	$۱/۰۵e-۰۵$	۱۷۱	$۱/۰۵e-۰۳$	۱۱۲	$۷/۲۶e-۰۵$	۱۲۰	$۲/۴۷e-۰۵$	۴۸	$۴/۵۸e-۰۵$	۴۴	$۴/۶e-۰۶$
	$P_{NREHSS۲}$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

مراجع

[1] Benzi M. and Golub G.H, *A preconditioner for generalized saddle point problems*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. , 26 (2004) 20–41.

[2] Cao Y., Yao L., Jiang M. and Niu Q. , *A relaxed HSS preconditioner for saddle point problems from meshfree discretization* , J Comput. Math,31 (2013) 398–421.

[3] Salkuyeh D.K. and Masoudi M., *A new relaxed HSS preconditioner for saddle point problems*, Numer Algorithms. 74 (2017) 781–795.

[4] Elman H.C., Ramage A. and Silvester D.J, *Algorithm 866: IFISS, a Matlab toolbox for modelling incompressible flow*, Mathematical Software, 33(2007)14.

[5] Saad Y. , *Iterative methods for sparse linear systems*, SIAM publication 2003.

دانشگاه شهید باهنر کرمان، ایران
دهمین سمینار جبر خطی
و کاربردهای آن
۲۶ لغایت ۲۹ مرداد ۱۳۹۹
10
Shahid Bahonar University of Kerman, Iran
Seminar on Linear Algebra
and its Applications
August 16 - 19 , 2020

تشخیص وب سایت‌های فیشینگ با یک رویکرد مبتنی بر متن کاوی[1]

سامان رفیعی ساردو* و سوده حسینی

بخش علوم کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده

در این مقاله یک مدل جدید برای تشخیص وب سایت‌های فیشینگ معرفی می‌شود که فقط از آدرس وب سایت‌ها، به عنوان یک مزیت، استفاده می‌کند تا بتواند یک وب سایت فیشینگ را در زمان واقعی و قبل از بارگذاری محتوای آن تشخیص دهد. مدل معرفی شده با دو رویکرد متفاوت، دو گروه از ویژگی‌ها را استخراج می‌کند که الگوریتم جنگل تصادفی روی ویژگی‌های استخراج شده دقت ۹۹/۳۹ را بدست آورده است.

واژه‌های کلیدی: حمله فیشینگ[2]، استخراج ویژگی[3]، یادگیری ماشین[4]، پردازش زبان طبیعی[5]، الگوریتم جنگل تصادفی[6]

کد موضوع‌بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 15A03، 15A18، 15B36

۱ مقدمه

یکی از حملاتی که خسارت زیادی به بار می آورد، حمله فیشینگ است که در آن مهاجمان سعی می کنند به وسیله وب سایت‌های جعلی اطلاعات حساس کاربر، مثل شماره کارت‌های اعتباری، اطلاعات ورود به حساب و ... کاربران را بدست آورند. در مقابل یکی از رایج‌ترین تلاش ها برای تشخیص حملات فیشینگ که معمولا توسط مرورگرها استفاده می‌شود، سیستم‌های لیست سیاه می‌باشد که لیستی از وب سایت‌های مشکوک را در خود ذخیره دارند. اما سیستم لیست سیاه در مقابل وب سایت‌های فیشینگ جدید ناتوان می‌باشد [۱] . یکی دیگر از روش‌های که در سال‌های اخیر توسط محققان استفاده شده است، استفاده از یادگیری ماشین [7] و داده‌کاوی [8] برای تشخیص حملات فیشینگ است [۲] [۳] . در این روش‌ها تشخیص آدرس [9] های فیشینگ به شدت وابسطه به مدل یادگیری ماشین مورد استفاده و همچنین داده‌های استخراج شده از صفحه‌های وب برای آموزش آن، است. این مقاله به منظور افزایش دقت و کارایی مکانیزم تشخیص حملات فیشینگ، یک مدل با توجه به الگوریتم‌های داده‌کاوی و یادگیری‌ماشین پیشنهاد می‌دهد. مدل پیشنهادی سعی می‌کند که یک صفحه وب را قبل از بارگذاری در زمان واقعی [10] و فقط با توجه به آدرس آن، نه محتوای صفحه، مستقل از زبان مورد بررسی قرار داده و راجع به آن تصمیم بگیرید که این یک مزیت محسوب می شود زیرا ضمن افزایش سرعت تشخیص حملات فیشینگ باعث کاهش حجم اینترنت مصرفی توسط کاربر نیز می‌شود. به منظور این کار مدل پیشنهادی در این مقاله با توجه به روش‌های استخراج ویژگی در متن‌کاوی [11] دو گروه از ویژگی‌ها را استخراج می‌کند و سپس با استفاده از آن‌ها یک الگوریتم یادگیری‌ماشین را

[1] تقدیم به شادروانان علیرضا افضلی پور و فاخره صبا، بنیانگذاران دانشگاه کرمان

*سخنران. آدرس ایمیل: saman.rafiee.rs@gmail.com

[2] Phishing Attack
[3] Feature Extraction
[4] Machine Learning
[5] Natural Language Processing
[6] Random Forest Algorithm
[7] Machine Learning
[8] Data Mining
[9] URL
[10] Real Time
[11] Text Mining

برای شناسایی حملات فیشینگ آموزش می‌دهد. این مقاله نشان می‌دهد که روش ما ضمن داشتن سرعت مناسب، از دقت مطلوبی نیز برخوردار است. این مقاله به شرح زیر دنبال می‌شود: بخش ۲ به تعدادی از کارهای انجام شده توسط محققان می‌پردازد. بخش ۳ ، مدل پیشنهادی این مقاله را بیان می‌کند. بخش ۴ نتایج پیاده سازی و ارزیابی را نشان می‌دهد. و با بحث نتیجه گیری در بخش ۵ پایان می‌یابد.

۲ کارهای انجام شده

در سال‌های اخیر برای تشخیص حملات فیشینگ از روش‌های متفاوتی استفاده شده است که در این بخش به بررسی تعدادی از آن‌ها می پردازیم. اوزگور کورای [1] و همکاران [۲] یک سیستم ضد فیشینگ در زمان واقعی، که از هفت الگوریتم طبقه‌بندی مختلف و ویژگی‌های مبتنی بر پردازش زبان طبیعی استفاده می‌کند، را ارائه کرده‌اند. مدل پیشنهادی آنها با دقت ۹۷/۹۸ درصد، آدرس‌های فیشینگ و نرمال را شناسایی می‌کند. یانگ [2] و همکاران [۳] یک روش تشخیص ویژگی‌های فیشینگ چند بعدی مبتنی بر یادگیری عمیق را ارائه می‌دهند. آن‌ها علاوه بر ویژگی‌های آماری آدرس، از ویژگی‌های کد و متن صفحه وب بعد از بارگذاری نیز استفاده می‌کنند. مقاله آنها دقت مدل پیشنهادی را روی یک مجموعه داده ۹۸/۹۹ درصد، نشان می‌دهد. رائو [3] و پاویس [4] [۴] یک مدل طبقه‌بندی جدید، مبتنی بر ویژگی‌های اکتشافی، که از آدرس، کد منبع و خدمات شخص ثالث استخراج شده‌اند، برای غلبه بر معایب تکنیک‌های ضد فیشینگ موجود، پیشنهاد می کنند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد الگوریتم جنگل تصادفی [5] با دقت ۹۹/۵۵ درصد بهترین نتیجه را دارد. کانگ [6] و همکاران [۵] یک چارچوب انتخاب ویژگی جدید مبتنی بر یادگیری‌ماشین برای شناسایی حملات فیشینگ معرفی کرده‌اند که در مرحله اول یک الگوریتم شیب تابع توزیع تجمعی [7] برای تولید زیر مجموعه‌های ویژگی اصلی استفاده می‌شود، سپس یک مجموعه آشفتگی داده [8] ، زیر مجموعه‌های ویژگی ثانویه را تولید کنند. مرحله دوم مجموعه‌ای از ویژگی‌های پایه را از زیر مجموعه‌های ویژگی ثانویه با استفاده از یک مجموعه اختلال عملکرد استخراج می‌کند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که ویژگی‌های استخراج شده با طبقه بندی جنگل تصادفی توانایی تشخیص ۹۴/۶ درصد از وب سایت‌های فیشینگ و مشروع را دارد.

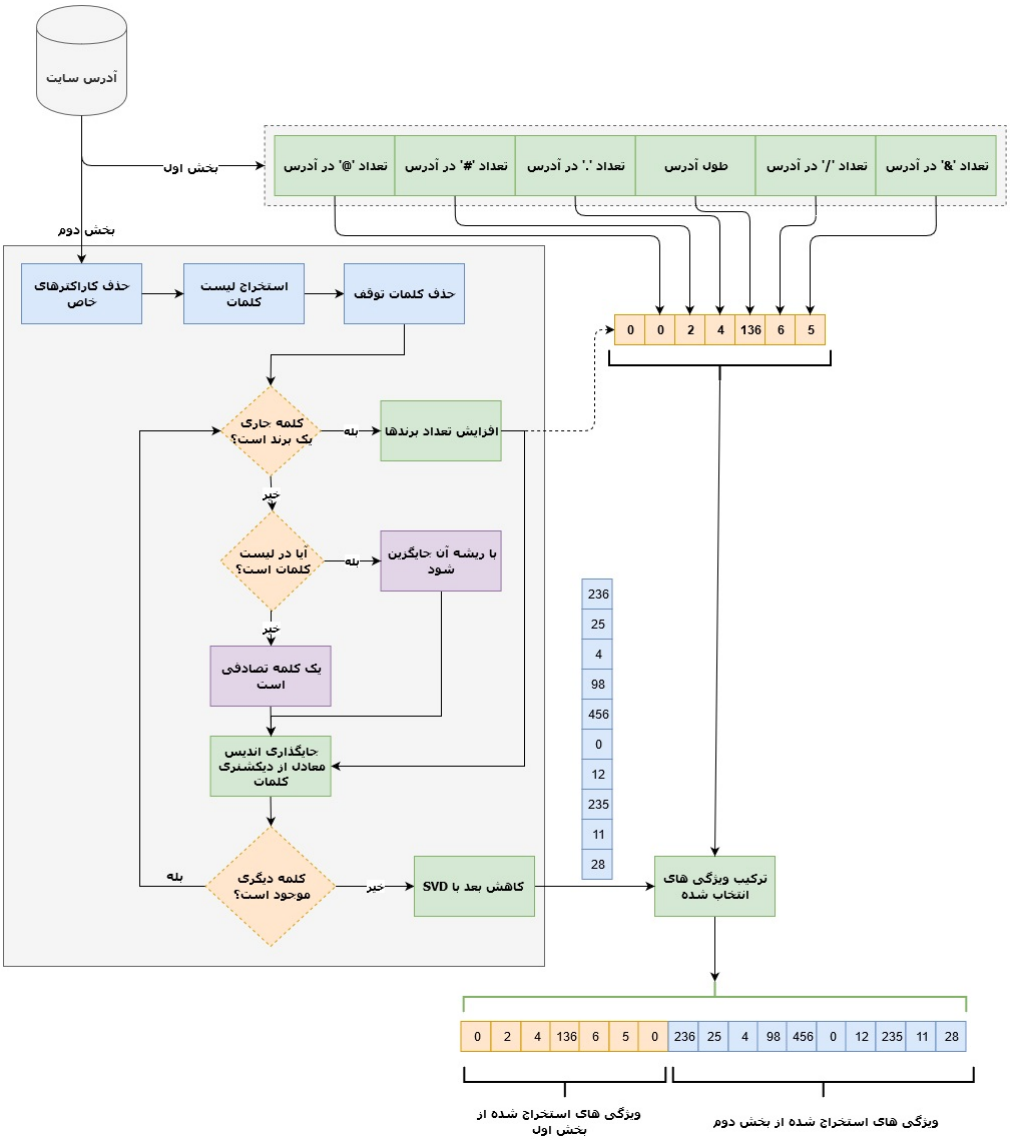
۳ مدل پیشنهادی

این بخش مدل پیشنهادی برای تشخیص وب سایت‌های فیشینگ بر اساس آدرس آن‌ها را بیان می‌کند. شکل ۱ نمای کلی از مدل پیشنهادی در این مقاله برای استخراج ویژگی از آدرس صفحه‌های وب که در ۳ مرحله استخراج ویژگی‌های آماری، استخراج ویژگی مبتنی بر متن کاوی و ترکیب ویژگی ها صورت می‌پذیرد، را نشان می‌دهد. (اعداد نشان داده شده در شکل ۱ خروجی یک نمونه را نشان می‌دهند).

۱.۳ استخراج ویژگی‌های آماری

این بخش ۷ ویژگی آماری که معمولا در آدرس وب سایت‌های فیشینگ یافت می‌شود را استخراج می‌کند. ۱. تعداد '@' در آدرس: اگر در آدرس یک وب سایت از کاراکتر '@' استفاده شود نحوه برخورد مرورگر با این آدرس به این صورت است که، تمام کاراکترهای قبل از این نماد را نادیده می گیرد لذا مهاجمین از این راه آدرس خود را پنهان می‌کنند. ۲. تعداد '#' در آدرس: وجود کاراکتر '#' در یک آدرس برای هدایت مرورگر بعد از بارگذاری صفحه به یک بخش خاص از صفحه است هر چند که استفاده از این کاراکتر در وب سایت‌های غیر فیشینگ نیز معمول است اما ممکن است که مهاجم بخواهد کاربر به یک بخش خاصی از یک وب سایت توجه کند. ۳. تعداد '.' در آدرس: از کاراکتر '.' به عنوان یک جداکنند در آدرس وب سایت‌های استفاده می‌شود و یکی از کاربردهای آن جداسازی زیردامنه [9] ها از دامنه اصلی است که مهاجمین با

[1] Ozgur Koray
[2] Yang
[3] Rao
[4] Pais
[5] Random Forest
[6] Kang
[7] Cumulative Distribution Function gradient
[8] data perturbation ensemble
[9] SubDomain



شکل ۱: مدل ارائه شده برای استخراج ویژگی از آدرس صفحه‌های وب.

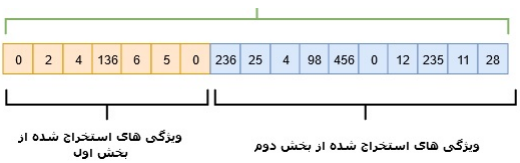
تعریف یک دامنه معروف به عنوان یک زیر دامنه وب سایت فیشینگ خود، قصد فریب کاربر را دارند. به عنوان مثال در آدرس $https : //amazon.com.phishing.com/index.php$ مهاجم با تعریف دامنه معروف $amazon.com$ به عنوان یک زیردامنه برای وب سایت خود، اعتماد کاربر را بدست می‌آورد. ۴. طول آدرس: این ویژگی تعداد کاراکترهای یک آدرس را در نظر می‌گیرد. در آدرس‌های فیشینگ مهاجم برای پنهان کاری بیشتر، که خود یک راه پنهان کردن ویژگی‌های قبلی از دیدی کاربر است، از آدرس‌های طولانی‌تری استفاده می‌کند. بنابراین می‌توان گفت که احتمال بیشتری وجود دارد که آدرس‌های طولانی‌تر وب سایت‌های فیشینگ باشند. ۵. تعداد '/' در آدرس: کاراکتر '/' به عنوان یک جدا کننده بعد از نام دامنه وب سایت برای معرفی یک مسیر منبع [1] استفاده می‌شود. این ویژگی برای تولید آدرس‌های طولانی مورد استفاده قرار می‌گیرد. ۶. تعداد '&' در آدرس: یکی از روش‌های ارسال پارامترها به سمت سرور استفاده از روش GET است که در طول یک آدرس پارامترهای به همراه مقادیر آن‌ها تعریف می‌شود. کاراکتر '&' به عنوان جدا کننده بین پارامترهای تعریف شده در روش GET است. ۷. تعداد کلمات برند در آدرس: مهاجمین برای پنهان کاری بیشتر و یا شباهت بیشتر آدرس تعریف شده به آدرس یک وب سایت معرف، سعی می‌کنند ازکلمات برند در آدرس‌های خود استفاده کنند. در این ویژگی تعداد آن‌ها را در یک آدرس بررسی می‌کنیم. این ویژگی در گام دوم بدست می‌آید اما به عنوان یک ویژگی کلیدی حساب می‌شود.

۲.۳ استخراج ویژگی مبتنی بر متن کاوی

در این گام از مدل پیشنهادی پس از حذف کاراکترهای اضافی فقط حروف لاتین و اعداد می‌مانند بنابراین ما دنباله‌ای از کلمات را خواهیم داشت که می‌توان آن را به لیستی از اعداد معادل با هر کلمه تبدیل کرد. برای اینکار در ابتدا کلمات توقف را از میان آن‌ها حذف می‌کنیم و در لیست کلمات باقیماند، هر کلمه را بررسی می‌کنیم که ایا یک کلمه برند است تا شمارنده آنها را افزایش دهیم؟ اگر نبود بررسی می‌شود که ایا به عنوان یک کلمه در دیکشنری کلمات قرار دارد؟ اگر به عنوان یک کلمه در دیکشنری قرار داشت، ریشه آن کلمه را به عنوان نماینده آن انتخاب می‌کنیم و معادل با آن از یک عدد استفاده می‌کنیم. همچنین اگر در دیکشنری کلمات تعریف نشده بود، آن را به عنوان یک کلمه تصادفی در نظر می‌گیریم و همه کلمه‌های تصادفی را معادل با یک عدد ثابت در نظر می‌گیریم. بدین ترتیب برای هر آدرس وب، ما یک بردار از اعداد خواهیم داشت که معادل با لیست کلمات موجود در آن خواهد بود. این بردار در آدرس‌های متفاوت، دارای طول متفاوتی خواهد بود و دلیل آن تفاوت در تعداد کلمات استفاده شده در آدرس‌های متفاوت می‌باشد. بنابراین تعداد کلمات داده‌ای از داده‌های آموزشی که بیشترین تعداد کلمات را دارد، به عنوان طول ثابت در نظر گرفته می‌شود و برای آدرس‌های جدید کلمات بیشتر از این تعداد را در نظر نمی‌گیریم و همچنین برای آدرس‌های که دارای تعداد کمتری از کلمات هستند، این کمبود را با مقدار صفر پر می‌کنیم. حال برای همه داده‌ها ما یک ماتریس خواهیم داشت که یک ماتریس خلوت [2] خواهد بود و ویژگی‌های آخر، ضمن با اهمیت بودن، برای تعداد زیادی از داده‌ها مقدار صفر را دارند و یک نویز برای داده‌ها ایجاد می‌کند و این یک مشکل است. بنابراین با استفاده از تجزیه SVD این ماتریس را به ۱۰ بعد (این عدد بصورت تجربی بدست آمده است) کاهش داده‌ایم تا ضمن حذف نویز، مشکل ماتریس داده‌ها حذف شود.

۳.۳ ترکیب ویژگی‌ها

همانطور که شکل ۲ نشان می‌دهد در این گام ۷ ویژگی استخراج شده در گام اول در کنار ۱۰ ویژگی از گام دوم برای هر نمونه داده، یک بردار با ۱۷ ویژگی را ایجاد می‌کنند. بنابراین ماتریس داده‌ها دارای ۱۷ ستون خواهد بود.



شکل ۲: ترکیب ویژگی‌های استخراج شده.

[1] pathname
[2] Sparse Matrix

۴ پیاده‌سازی

برای پیاده سازی و ارزیابی مدل ارائه شده در این مقاله از مجموعه داده معرفی شده در [۲] استفاده می‌کنیم که در [۶] قابل دسترس است. این مجموعه داده شامل ۳۶۴۰۰ آدرس صفحه وب نرمال و ۳۷۱۷۵ آدرس صفحه وب فیشینگ به همراه لیستی از کلمات برند و یک دیکشنری از کلمات موجود است. ما بصورت تصادفی ۳۰ درصد از داده‌ها را به عنوان تست و ۷۰ درصد را برای آموزش مدل استفاده کرده‌ایم. در ادامه با استفاده از مقادیر درست مثبت ،(TP) نادرست مثبت ،(FP) نادرست منفی(FN) و درست منفی (TN) معیارهای زیر را برای ارزیابی مدل پیشنهادی محاسبه می‌کنیم: در رابطه (۱) مقدار بازخوانی [۱] محاسبه می‌شود که معادل تعداد نمونه های مثبت شناسایی شده به کل نمونه‌های مثبت است.

$$recall = \frac{TP}{TP + FN} \quad (۱)$$

در رابطه (۲) مقدار صحت [۲] محاسبه می‌شود که معادل تعداد نمونه‌های تشخیصی درست مثبت به کل نمونه‌های مثبت اعلام شده است تا میزان مثبت‌های اشتباه هم در نظر گرفته شده باشد.

$$precision = \frac{TP}{TP + FP} \quad (۲)$$

در رابطه (۳) مقدار میانگین هارمونی برای دو مقدار بازخوانی و صحت بدست می‌آید که معیار- اف [۳] نام دارد .

$$F - Measure = \frac{۲ * Precision * Reccall}{Precision + Recall} \quad (۳)$$

در رابطه (۴) مقدار دقت [۴] محاسبه می‌شود که معادل تعداد نمونه‌های درست تشخیص داده شده به کل نمونه ها است.

$$Accuracy = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FNl} \quad (۴)$$

نتایج آزمایش ما نشان می‌دهد که الگوریتم جنگل تصادفی (RF) نسبت به الگوریتم‌های شبکه عصبی پرسپترون [۵] (MLP) ، درخت تصمیم [۶] (DT) و نزدیکترین همسایه [۷] (KNN) با ۹۹/۳۹ درصد بیشترین دقت را دارد. شکل ۳ خروجی آزمایش ما را نشان می‌دهد و بیانگر این است که مدل پیشنهادی ضمن اینکه فقط از آدرس صفحه‌های وب استفاده می‌کند، توانایی بالاتر یا بسیار نزدیکی در تشخیص صفحه‌های وب فیشینگ، نسبت به مقالات معرفی شده دارد.

۵ بحث و نتیجه‌گیری

شناسایی حملات فیشینگ یکی از چالش‌های امنیتی در حوزه اینترنت است. این مقاله یک مدل مبتنی بر یادگیری ماشین و داده‌کاوی با یک رویکرد متن‌کاوی را ارائه می‌دهد. نتایج آزمایش‌ها نشان می‌دهد که مدل پیشنهاد شده فقط با استفاده از آدرس صفحه‌های وب توانایی بالایی در تشخیص وب سایت‌های فیشینگ دارد.

مراجع

[1] Varshney G, Misra M, Atrey PK. A Survey and Classification of Web Phishing Detection Schemes. Security and Communication Networks. 2016; 9(18):6266-84.

[1] Recall
[2] Precision
[3] F-Measure
[4] Accuracy
[5] multilayer perceptron
[6] decision tree
[7] k-nearest neighbors

الگوریتم	دقت	نوع وب سایت	صحت	بازخوانی	معیار- اف
RF	**۹۹٫۳۹**	**فیشینگ**	**۰٫۹۹**	**۰٫۹۹**	**۰٫۹۹**
		نرمال	**۰٫۹۹**	**۰٫۹۹**	**۰٫۹۹**
MLP	۹۶٫۱۸	فیشینگ	۰٫۹۸	۰٫۹۵	۰٫۹۶
		نرمال	۰٫۹۵	۰٫۹۸	۰٫۹۶
DT	۹۷٫۶۵	فیشینگ	۰٫۹۸	۰٫۹۸	۰٫۹۸
		نرمال	۰٫۹۸	۰٫۹۸	۰٫۹۸
KNN	۹۷٫۲۴	فیشینگ	۰٫۹۷	۰٫۹۷	۰٫۹۷
		نرمال	۰٫۹۷	۰٫۹۷	۰٫۹۷

شکل ۳: نتایج اجرای الگوریتم جنگل تصادفی روی داده‌های استخراج شده.

[2] Sahingoz OK, Buber E, Demir O, Diri B. Machine Learning based Phishing Detection from Urls. Expert Systems with Applications. 2019; 117: 345-57.

[3] Yang P, Zhao G, Zeng P. Phishing Website Detection Based on Multidimensional Features Driven by Deep Learning. IEEE Access. 2019; 7: 15196-209.

[4] Rao RS, Pais AR. Detection of Phishing Websites Using an Efficient Feature-Based Machine Learning Framework. Neural Computing and Applications. 2019; 31(8):3851-73.

[5] Chiew KL, et al. A New Hybrid Ensemble Feature Selection Framework for Machine Learning-Based Phishing Detection System. Information Sciences. 484 (2019): 153-166.

[6] Ebbu2017 Phishing Dataset. Accessed 24 July 2018. https://github.com/ebubekirbbr/pdd/tree/master/input.

دانشگاه شهید باهنر کرمان، ایران
دهمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن
۲۶ لغایت ۲۹ مرداد ۱۳۹۹
Shahid Bahonar University of Kerman, Iran
Seminar on Linear Algebra and its Applications
August 16 - 19 , 2020

مقایسه محاسبه ارزش اختیار معامله اروپایی به روش های درخت دوجمله‌ای و فرمول بلک-شولز[۱]

امیر محمد محرری*، سید محمد مهدی حسینی و رضا دوستکی
بخش ریاضی کاربردی، دانشگاه شهید باهنر، کرمان، ایران

چکیده

مدل درخت دو جمله ای یک روش مفید و متداول برای قیمت گذاری اختیار معامله است. در این مقاله قیمت اختیار معامله های خرید و فروش اروپایی سه سهم مختلف از بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از روش درخت دوجمله‌ای N-گامی به ازای تعداد گام‌های مختلف انجام گرفته و همچنین این قیمت ها با استفاده از فرمول قیمت گذاری اختیار معامله بلک شولز نیز محاسبه شده است. در ادامه با معیار قرار دادن مدل بلک شولز به بررسی تغییر رفتار مدل درخت دوجمله ای با افزایش تعداد گام ها پرداخته شده است. همانطورکه در ادامه مشاهده خواهید کرد هرچه تعداد گام ها افزایش پیدا کنند قیمت گذاری مدل درخت دو جمله ای به قیمت گذاری مدل بلک شولز نزدیک تر و اختلاف قیمت گذاری توسط این دو مدل کاهش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: اختیار معامله خرید و فروش اروپایی، مدل درخت دوجمله‌ای، مدل بلک-شولز
کد موضوع‌بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 97M30، 62P05

۱ مقدمه

به طور کلی می‌توان حق اختیار معامله را به دو دسته تقسیم کرد: اختیارخرید و اختیارفروش. یک اختیار خرید در واقع این حق(و نه الزام) را به دارنده آن می‌دهد، که دارایی موضوع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخص یا قبل از آن بخرد. به همین ترتیب یک اختیار فروش به دارنده آن این حق را می‌دهد،که دارایی موضوع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخص یا قبل از آن بفروشد. قیمتی که در قرارداد ذکر می‌شود، (قیمت توافقی) یا (قیمت اعمال) و تاریخ ذکر شده در قرار داد را اصطلاحا (تاریخ انقضا) یا (سر رسید اختیار معامله) می‌گویند [۲]. اختیار معامله اروپایی، اختیار معامله هایی هستند که اعمال آن ها فقط در زمان سررسید مقرر شده، صورت می‌پذیرد و خریدار اختیار معامله هیچ گاه قبل از زمان سر رسید قید شده در اختیار معامله، مجاز به استفاده از اختیار معامله خود نیست. اختیار معامله های آمریکایی بر خلاف نوع اروپایی در هر تاریخی قبل از زمان سررسید قابل اعمال هستند. دو روش متداول برای محاسبه‌ی قیمت یک اختیار معامله اروپایی استفاده از فرمول بلک-شولز و فرمول روش درخت دوجمله‌ای N-گامی است. درابتدا به معرفی فرمول درخت دوجمله‌ای N-گامی می‌پردازیم که فرم کلی آن به شکل زیر می‌باشد:

$$D(۰) = \frac{۱}{(۱+r)^{-N}} \left[\sum_{i=۰}^{N} \binom{N}{i} p^{N-i}(۱-p)^{i} f\left(S(۰)(۱+u)^{N-i}(۱+d)^{i}\right) \right] \qquad (۱)$$

در این‌جا: r نرخ بهره بدون ریسک، N تعداد گام های بین زمان بستن قرار داد (زمان صفر) و زمان انقضای قرارداد، p احتمالی است که در هرگام ممکن است رخ دهد تا به گام بعدی برسیم، $S(۰)$ قیمت سهم در زمان صفر، f تابع ارزش اعمال

[۱] تقدیم به شادروانان علیرضا افضلی پور و فاخره صبا، بنیانگذاران دانشگاه کرمان
* سخنران. آدرس ایمیل: amirmohammadmohareri@gmail.com

اختیار معامله و $D(\circ)$ نشان دهنده ارزش یا قیمت اختیار معامله در زمان صفر است. فرمول (۱) برای حالت گسسته می‌باشد. به منظور سوق دادن این فرمول به مدل زمان پیوسته می‌توان از فرمول زیر نیز استفاده کرد:

$$D(\circ) = e^{-rT}\left[\sum_{i=\circ}^{N}\binom{N}{i}p^{N-i}(۱-p)^{i}f\left(S(\circ)(۱+u)^{N-i}(۱+d)^{i}\right)\right] \qquad (۲)$$

که یک روش عملی برای محاسبه‌ی مقدار p در یک مدل درخت دوجمله‌ای N-گامی به صورت زیر است:

$$p = \frac{a-d}{u-d}, \qquad (۳)$$

در آن:

$$\begin{aligned} ۱+u = e^{\sigma\sqrt{dt}} \quad &; \quad u = e^{\sigma\sqrt{dt}} - ۱, \\ ۱+d = e^{-\sigma\sqrt{dt}} \quad &; \quad d = e^{-\sigma\sqrt{dt}} - ۱, \\ dt = \frac{T}{N} \quad &; \quad a = e^{rdt}. \end{aligned}$$

بطوری‌که T تاریخ سررسید اختیارمعامله و σ انحراف معیار بازده لگاریتمی سهم می‌باشد. فرمول قیمت گذاری اختیار معامله خرید و فروش اروپایی به روش بلک-شولز به‌صورت زیر می‌باشد:

$$Ce(\circ) = S(\circ)N(d_۱) - Ke^{-rT}N(d_۲), \qquad (۴)$$
$$Pe(\circ) = Ke^{-rT}N(-d_۲) - S(\circ)N(-d_۱), \qquad (۵)$$

که در آن:

$$N(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^{۲}}{۲}}dy,$$

که در این رابطه:

$$d_۱ = \frac{ln(\frac{S(\circ)}{k}) + (r+\frac{\sigma^{۲}}{۲})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_۲ = d_۱ - \sqrt{T},$$

و $Ce(\circ)$ و $Pe(\circ)$ به ترتیب قیمت اختیار معامله خرید و فروش اروپایی در زمان صفر هستند [۱، ۲]. در این مقاله با درنظر گرفتن سه سهم از بورس اوراق بهادار تهران نشان می‌دهیم که برای این سه سهم با افزایش تعداد گام در مدل درخت دوجمله‌ای، قیمت اختیار معامله‌ی حاصل از مدل درخت دوجمله‌ای N-گامی به قیمت حاصل از مدل بلک-شولز نزدیک می‌شود.

۲ نتایج عددی

در این بخش ابتدا با در نظر گرفتن قیمت تعدیل شده سه سهم ایران خودرو(خودرو)، ملی صنایع مس ایران(فملی) و پالایشگاه بندرعباس(شبندر) در بازه زمانی ۱۳۹۷/۱۰/۱ تا ۱۳۹۸/۱۰/۱، مقدار انحراف معیار بازده (σ) هر یک از این سهام در جدول ۱ نشان داده شده است. سپس با استفاده از فرمول های (۲) و (۴) قیمت اختیار معامله توسط روش های درخت دوجمله‌ای و بلک-شولز توسط نرم افزار متلب محاسبه شده است. در ادامه نتایج حاصل برای هر یک از این سهام به تفکیک نشان داده شده است. سهم ایران خودرو: با در نظر گرفتن مفروضات زیر

$$S(\circ) = ۹۰۲۰, \quad K = ۱۲۱۷۷, \quad r = \circ/۱۵, \quad T = ۱,$$

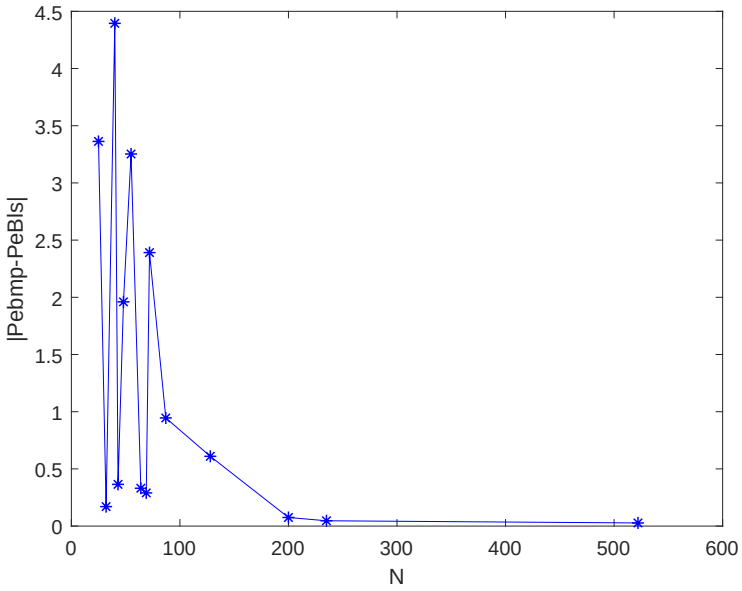
جدول شماره ۲ نشان دهنده نتایج حاصل از مدل درخت دوجمله ای به ازای تعداد گام های مختلف و مقایسه این نتایج با نتایج حاصل از روش بلک-شولز است. همانطور که ملاحظه می‌شود، با افزایش تعداد گام در مدل درخت دوجمله‌ای نتایج حاصل از این روش به نتایج حاصل از روش بلک-شولز نزدیک می‌شود.

جدول ۱: مقدار انحراف معیار برای هر سهم

σ-شبندر	σ-فملی	σ-خودرو
۰٫۳۲۲۶۱۳۱۱۳۶۸۰۹۳۲	۰٫۲۸۴۶۰۴۲۸۲۸۶۸۷۸۲	۰٫۴۲۷۶۹۴۷۷۳۵۱۲۱۳۱

جدول ۲: نتایج قیمت اختیار معامله اروپایی حاصل از روش درخت دو جمله‌ای N-گامی برای سهم ایران خودرو

قدرمطلق اختلاف قیمت اختیار معامله فروش به روش‌های درخت دو جمله‌ای و بلک-شولز	قیمت اختیار معامله فروش توسط درخت دوجمله‌ای	قدرمطلق اختلاف قیمت اختیار معامله خرید به روش‌های درخت دو جمله‌ای و بلک-شولز	قیمت اختیار معامله خرید توسط درخت دوجمله‌ای	N
۱۹۴/۸۲۸۲۹۳۴۳۹۰۷۵	۲۲۸۵/۵۶۶۴۹۶۴۱۳۹۶	۱۹۴/۸۲۸۲۹۳۴۳۹۰۷۵	۸۲۴/۷۲۵۴۶۷۴۸۶۰۲۸	۱
۲۶/۶۹۵۸۴۸۷۲۳۶۱۰۲	۲۵۰۷/۰۹۰۶۳۸۵۷۶۶۴	۲۶/۶۹۵۸۴۸۷۲۳۶۱۲۷	۱۰۴۶/۲۴۹۶۰۹۶۴۸۷۲	۲۲
۱۰/۷۱۶۱۴۵۴۵۶۲۹۵۲	۲۴۹۱/۱۱۰۹۳۵۳۰۹۳۳	۱۰/۷۱۶۱۴۵۴۵۶۲۸۵۴	۱۰۳۰/۲۶۹۹۰۶۳۸۱۳۹	۲۴
۱/۱۷۷۸۶۹۲۱۶۱۶۴۲۵	۲۴۷۹/۲۱۶۹۲۰۶۳۶۸۷	۱/۱۷۷۸۶۹۲۱۶۲۱۸۷۱	۱۰۱۸/۳۷۵۸۹۱۷۰۸۸۸	۲۶
۰/۶۵۱۴۷۵۸۹۷۷۲۷۳۲۳	۲۴۸۱/۰۴۶۲۶۵۷۵۰۷۶	۰/۶۵۱۴۷۵۸۹۷۸۶۰۲۲۳	۱۰۲۰/۲۰۵۲۳۶۸۲۲۹۶	۲۸
۰/۰۲۵۶۱۹۳۶۲۸۳۷۰۰۵۶	۲۴۸۰/۳۶۹۱۷۰۴۹۰۲۰	۰/۰۲۵۶۱۹۳۶۲۹۷۵۷۰۳۶	۱۰۱۹/۵۲۸۱۴۱۵۶۲۱۳	۲۱۰



شکل ۱: قدرمطلق اختلاف قیمت اختیار خرید اوپایی بین دو روش بلک–شولز و درخت دوجمله‌ای N–گامی برای شرکت ملی صنایع مس ایران

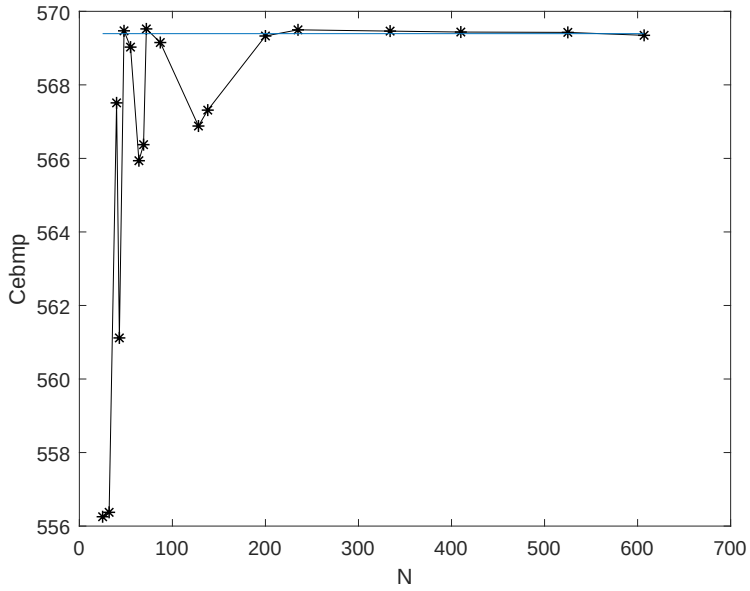
سهم شرکت ملی صنایع مس ایران (فملی): با درنظر گرفتن مفروضات زیر

$$S(\circ) = ۵\circ۷۳, \quad K = ۶۵۹۵, \quad r = \circ/۱۵, \quad T = ۱,$$

همچنین شکل ۱ بیانگر قدر مطلق اختلاف قیمت دو روش درخت دوجمله‌ای و روش بلک–شولز می‌باشد که با افزایش تعداد گام‌ها در روش درخت دوجمله‌ای N–گامی، اختلاف این دو روش کمتر می‌شود.
سهم شرکت پالایش نفت بندرعباس (شبندر): با در نظر گرفتن مفروضات زیر

$$S(\circ) = ۹۲۶۴, \quad K = ۱۲۹۷\circ, \quad r = \circ/۱۵, \quad T = ۱,$$

در شکل ۲ مورد بررسی قرار گرفته است.



شکل ۲: مقایسه قیمت اختیار خرید اروپایی به روش درخت دوجمله‌ای ($*$) و روش بلک–شولز ($-$) برای شرکت پالایش نفت بندرعباس

در شکل ۲ نزدیک شدن قیمت اختیار معامله خرید توسط روش درخت دوجمله‌ای N–گامی به قیمت اختیار معامله توسط بلک–شولز به ازای گام‌های مختلف نمایش داده شده است که با افزایش گام ها دو نمودار به هم منطبق می‌شوند.

۳ نتیجه‌گیری

در این مقاله نشان داده شد که برای سه سهم ایران خودرو، ملی صنایع مس ایران و پالایش نفت بندرعباس، قیمت اختیار معامله اروپایی حاصل از روش درخت دوجمله‌ای N–گامی با افزایش N، به سمت قیمت حاصل از روش بلک–شولز همگرا می‌گردد.

مراجع

[1] M. Capinski and T. Zastawniak, *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineerring*, 2nd edition, Springer, 2011.

[2] J. C. Hull, *Option, Futures and other Derivatives*, 8nd edition, Pearson Prentice Hall, 2012.

دانشگاه شهید باهنر کرمان، ایران
دهمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن
۲۶ لغایت ۲۹ مرداد ۱۳۹۹
Shahid Bahonar University of Kerman, Iran
Seminar on Linear Algebra and its Applications
August 16 - 19 , 2020

مساله مقدار ویژه معکوس ماتریس شبه سلول[۱]

علی محمد نظری و فاطمه سادات موسوی*

گروه ریاضی، دانشگاه اراک، اراک، ایران، کدپستی ۳۸۱۵۶-۸-۸۳۴۹

چکیده

در این مقاله ابتدا به معرفی ماتریس شبه سلول می‌پردازیم، سپس مساله مقدار ویژه معکوس این ماتریس را تا مرتبه ۴ حل می‌کنیم. ماتریس سلول از انواع ماتریس‌های فاصله است. ماتریس ارائه شده در این مقاله با تغییرات کمی از روی ماتریس سلول ساخته می‌شود. پرداختن به مساله مقدار ویژه معکوس ماتریس‌های فاصله به‌خاطر این‌که از انواع ماتریس‌های نامنفی هستند، از دیربار مورد توجه بوده است و در این مقاله حالت دیگری از این نوع مساله مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: ماتریس شبه سلول

کد موضوع‌بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 15A29، 15A18

۱ مقدمه

تعریف ۱.۱. ماتریس $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک ماتریس فاصله اقلیدسی یا به اختصار EDM نامیده می‌شود، اگر n نقطه‌ی $x_1, x_2, \ldots, x_n$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^r (r \leq n)$ وجود داشته باشند، به‌طوری‌که

$$d_{ij} = \| x_i - x_j \|^2, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

که در آن $\| \cdot \|$ نرم اقلیدسی است. واضح است که این ماتریس یک ماتریس نامنفی است و قطر اصلی آن درایه‌های صفر را دارد. از خواص مهم این ماتریس این است که یکی از مقادیر ویژه‌اش مثبت و سایر مقادیر ویژه آن منفی و چون مجموع مقادیر ویژه برابر با اثر ماتریس است، پس مجموع مقادیر ویژه آن برابر با صفر خواهد بود. برای هر سه بردار از مجموعه بردارهای مولد ماتریس فاصله، درایه‌های متناظر با این بردارها در ماتریس فاصله متناظر باید به‌گونه‌ای باشند که نامساوی مثلثی برای آن‌ها برقرار باشد. مساله مقدار ویژه معکوس ماتریس‌های فاصله ابتدا با استفاده از ماتریس آدامارد[۲] برای $n \in \mathbb{N}$هایی که برای آن‌ها این ماتریس وجود دارد حل شد و نظری[۳] و مهدی نسب[۴] در سال ۲۰۱۴ توانستند آن را بدون استفاده از این نوع ماتریس‌ها و فقط با کمک ماتریس‌های متعامد حل نمایند [۳].

تعریف ۲.۱. اگر ماتریس نامنفی، متقارن با قطر صفر D را برای بردار $x = [x_i] \in R^n_+$ به صورت زیر تعریف کنیم

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & (i = j) \\ x_i + x_j & (i \neq j) \end{cases} \qquad (1)$$

آنگاه ماتریس بدست آمده با درایه‌های به‌صورت فوق، ماتریس سلول نامیده می‌شود. بردار $x = [x_i] \in R^n_+$، بردار مولد یا بردار همراه این ماتریس نامیده می‌شود.

[۱] تقدیم به شادروانان علیرضا افضلی پور و فاخره صبا، بنیانگذاران دانشگاه کرمان

* سخنران. آدرس ایمیل: a-nazari@araku.ac.ir

[2] Hadamard
[3] Nazari
[4] Mahdinasab

مثال ۳.۱. بردار $x \in R^3$ با مختصات $x = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{pmatrix}$ را در نظر می‌گیریم، ماتریس سلول تولید شده‌ی $D \in \mathbb{M}_{۳\times۳}$ به شکل زیر می‌باشد

$$D = \begin{pmatrix} ۰ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۰ & ۵ \\ ۴ & ۵ & ۰ \end{pmatrix}$$

۲ ماتریس شبه سلول

تعریف ۱.۲. ماتریس شبه سلول همانند ماتریس سلول تعریف می‌کنیم با این تفاوت که اولین درایه بردار همراه آن منفی است، یعنی برای بردار همراه

$$\overrightarrow{a} = (a_۱, a_۲, \cdots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad a_۱ < ۰, a_i > ۰, \qquad (i = ۲, \ldots, n).$$

ویژگی دیگر ماتریس شبه سلول این است که مجموع درایه‌های بردار همراه آن صفر است یعنی

$$\sum_{i=۱}^{n} a_i = ۰$$

فرض کنیم $\overrightarrow{a} = (a_۱, a_۲, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$، ماتریس $D(\overrightarrow{a}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را شبه سلول گوییم اگر

$$d_{ij} = \begin{cases} ۰ & (i = j) \\ a_i + a_j & (i \neq j) \end{cases} \qquad (۲)$$

لم ۲.۲. *فرض کنیم $D(\overrightarrow{a}) \in \mathbb{R}^{۴\times۴}$ یک ماتریس شبه سلول باشد، همچنین فرض کنیم $\widehat{D}(\overrightarrow{a}) \in \mathbb{R}_+^{۴\times۴}$ ماتریس مثبت شبه سلول باشد، که به صورت زیر تعریف شود*

$$d_{ij} = \begin{cases} ۰ & (i = j) \\ |a_i + a_j| & (i \neq j) \end{cases} \qquad (۳)$$

در این صورت مقادیر ویژه این دو ماتریس با هم برابرند.

اثبات. برای این منظور کافیست ثابت کنیم چندجمله‌های مشخصه دو ماتریس باهم برابرند: ابتدا برای ماتریس‌های ۳×۳ داریم

$$\Delta_x(D(\overrightarrow{a})_{۳\times۳}) = x^۳ - ((x_۱+x_۲)^۲ + (x_۱+x_۳)^۲ + (x_۲+x_۳)^۲)x - ۲\underbrace{(x_۱ + x_۳)(x_۱ + x_۲)}_{\text{sgn}=+}(x_۲+x_۳),$$

$$\Delta_x(\widehat{D}(\overrightarrow{a})_{۳\times۳}) = x^۳ - ((|x_۱+x_۳|)^۲ + (|x_۲+x_۳|)^۲ + (|x_۱+x_۲|)^۲)x - ۲\,|x_۱+x_۳||x_۱+x_۲||x_۲+x_۳|,$$

همانطور که مشاهده می‌شود $\Delta_x(D(\overrightarrow{a})_{۳\times۳}) = \Delta_x(\widehat{D}(\overrightarrow{a})_{۳\times۳})$.
برای ماتریس‌های ۴×۴ داریم

$$\begin{aligned}
&\Delta_x(D(\overrightarrow{a})_{۴\times۴}) = x^۴ \\
&-((x_۱ + x_۴)^۲ + (x_۲ + x_۴)^۲ + (x_۳ + x_۴)^۲ + (x_۱ + x_۳)^۲ + (x_۲ + x_۳)^۲ + (x_۱ + x_۲)^۲)x^۲ \\
&-(۲(x_۱ + x_۴)(x_۱ + x_۲)(x_۲ + x_۴) + ۲(x_۱ + x_۴)(x_۱ + x_۳)(x_۳ + x_۴) \\
&+۲(x_۲ + x_۴)(x_۲ + x_۳)(x_۳ + x_۴) + ۲(x_۱ + x_۳)(x_۱ + x_۲)(x_۲ + x_۳))x \\
&-۲(x_۱ + x_۴)(x_۱ + x_۲)(x_۲ + x_۳)(x_۳ + x_۴) - ۲(x_۱ + x_۴)(x_۱ + x_۳)(x_۲ + x_۳)(x_۲ + x_۴) \\
&-۲(x_۲ + x_۴)(x_۱ + x_۲)(x_۱ + x_۳)(x_۳ + x_۴) \\
&+(x_۱ + x_۴)^۲(x_۲ + x_۳)^۲ + (x_۲ + x_۴)^۲(x_۱ + x_۳)^۲ + (x_۳ + x_۴)^۲(x_۱ + x_۲)^۲,
\end{aligned}$$

$$\Delta_x(\widehat{D}(\overrightarrow{a})_{۴\times۴}) = x^۴$$
$$-((|x_۱+x_۴|)^۲+(|x_۲+x_۴|)^۲-(|x_۳+x_۴|)^۲+(|x_۱+x_۳|)^۲+(|x_۲+x_۳|)^۲+(|x_۱+x_۲|)^۲)x^۲$$
$$-(۲\,|x_۱+x_۴||x_۱+x_۲||x_۲+x_۴|+۲\,|x_۱+x_۴||x_۱+x_۳||x_۳+x_۴|$$
$$+۲\,|x_۲+x_۴||x_۲+x_۳||x_۳+x_۴|+۲\,|x_۱+x_۳||x_۱+x_۲||x_۲+x_۳|)x$$
$$-۲\,|x_۱+x_۴||x_۱+x_۲||x_۲+x_۳||x_۳+x_۴|-۲\,|x_۱+x_۴||x_۱+x_۳||x_۲+x_۳||x_۲+x_۴|$$
$$-۲\,|x_۲+x_۴||x_۱+x_۲||x_۱+x_۳||x_۳+x_۴|$$
$$+(|x_۱+x_۴|)^۲(|x_۲+x_۳|)^۲+(|x_۲+x_۴|)^۲(|x_۱+x_۳|)^۲+(|x_۳+x_۴|)^۲(|x_۱+x_۲|)^۲$$

با مقایسه علامت ضرایب توان‌های x^i برای $i=۱,۲,۳,۴$ واضح است که این ضرایب با هم برابرند، پس مقادیر ویژه‌ی دو ماتریس $D(\overrightarrow{a})$ و $\widehat{D}(\overrightarrow{a})$ تا مرتبه ۴ با هم برابرند. □

لم ۳.۲. *ماتریس شبه سلول ۴×۴، $D(\overrightarrow{a})$ دارای دقیقاً یک مقدار ویژه مثبت و مابقی منفی هستند.*

اثبات. فرض کنیم $\widehat{D}^{(i)}$ زیر ماتریس اصلی پیشرو ماتریس $\widehat{D}(\overrightarrow{a})$ باشد، همچنین فرض کنیم $p_i := \det(\widehat{D}^{(i)}-xI)$ چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس $\widehat{D}^{(i)}$ بوده و $\lambda_۱^{(i)}$ و $\lambda_i^{(i)}$ به‌ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقادیر ویژه زیر ماتریس اصلی پیش‌رو $\widehat{D}^{(i)}$ برای $i=۱,۲,۳,۴$ باشد. واضح است که برای ماتریس ۱×۱، $\lambda^{(۱)}=۰$. حال چون $\operatorname{trace}(D^{(i)})=۰$ و $\sum_{j=۱}^{i}\lambda_j=۰$ و $\det(D^{(i)})=\prod_{j=۱}^{i}\lambda_j\neq۰$، قضیه کشی [۱] در [۱] بیان می‌کند که

$$\lambda_۳^{(i-۱)}\leq\lambda_۳^{(i)}\leq\lambda_۲^{(i-۱)}\leq\lambda_۲^{(i)}\leq\lambda_۱^{(i-۱)}\leq\lambda_۱^{(i)}. \qquad (۴)$$

ملاحظه می‌شود که برای ماتریس ۳×۳،

$$p_۳(۰)=۲(a_۱+a_۲)(a_۱+a_۳)(a_۲+a_۳)>۰.$$

از طرفی داریم و $p_۳(x)=(\lambda_۱-x)(\lambda_۲-x)(\lambda_۳-x)$ ، لذا از این‌که $p_۳(۰)>۰$ دو حالت رخ می‌دهد یا هر سه مقدار ویژه مثبت هستند یا یکی مثبت دو تای دیگر منفی، بنابراین چون مجموع مقادیر ویژه این ماتریس صفر است، حالت یک مقدار ویژه مثبت و دوتای دیگر منفی باید برقرار باشد. $\lambda_۱>۰,\lambda_۲<۰$ همچنین چون $\operatorname{sign}(p_i(۰))=(-۱)^{i-۱}$ برای ماتریس ۴×۴، هم به همین شکل چون $p_۴(۰)=<۰$، و $p_۴(x)=(\lambda_۱-x)(\lambda_۲-x)(\lambda_۳-x)(\lambda_۴-x)$ لذا دو حالت رخ می‌دهد، یا ۳مقدار ویژه منفی ۲ مقدارویژه مثبت، یا یک مقدار ویژه منفی مابقی مثبت. طبق (۴) حالت اول نمی‌تواند رخ دهد لذا برای ماتریس ۴×۴ نیز یک مقدارویژه مثبت و مابقی منفی هستند.
از طرفی چون ماتریس $\widehat{D}$ در فضای $\mathbb{R}$ با نرم قدر مطلق $|.|$ تعریف شده است، لذا یک ماتریس فاصله است، در نتیجه دارای خواص ماتریس فاصله نیز می‌باشد، لذا دارای یک مقدار ویژه مثبت و مابقی منفی، همچنین چون ماتریس شبه سلول و ماتریس مثبت آن دارای مقادیر ویژه یکسان هستند لذا این خاصیت در مورد ماتریس شبه سلول هم صدق می‌کند. □

۳ مساله مقدار ویژه معکوس ماتریس شبه سلول

در [۲] مساله مقدار ویژه معکوس ماتریس های سلول ۳×۳ بررسی و حل شده است و همان روش برای ماتریس های شبه سلول ۳×۳ قابل اجراست. همانطور که در [۲] ذکر شده است مساله مقدار ویژه معکوس ماتریس های سلول در بعد ۴ و بیشتر بسیار پیچیده است و دارای معادلات و مجهولات زیادی می‌باشد و این مساله هنوز باز است. اما در همان مقاله روشی را برای ماتریس های سلول $n\times n$ ارائه دادند به‌طوری که برای m مقدار ویژه، یک ماتریس $n\times n$ ساختند که این ماتریس دارای همان m مقدار ویژه و $n-m$ مقدار ویژه دیگر نیز باشد یعنی برای چهار مقدار ویژه ماتریسی با بعد بیشتر از چهار ارائه دادند که شامل آن چهار مقدار ویژه هم باشد. ما در این مقاله دقیقاً برای چهار مقدار ویژه داده شده یک ماتریس چهار در چهار شبه سلول ساختیم به‌صورتی که برای حل و رسیدن به این ماتریس و ارتباط بردار مولد سلولش با مقدار ویژه‌اش به چهار معادله و چهار مجهول $x_۱,x_۲,x_۳,x_۴$ رسیدیم که در آن $x=(x_۱,x_۲,x_۳,x_۴)^T$ بردار مولد ماتریس شبه سلول فرض شده است. از این رو خواهیم داشت

.۱

$$\lambda_۱+\lambda_۲+\lambda_۳+\lambda_۴=۰,$$

[1] Cauchy's interlacing theorem

۲.
$$-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_4-\lambda_2\lambda_3-\lambda_3\lambda_4=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\mu^2+\zeta^2+\varphi^2,$$

۳.
$$\lambda_1\lambda_3\lambda_2+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_3\lambda_2\lambda_4=2\,\alpha\,\beta\,\gamma+2\,\alpha\,\gamma\,\mu+2\,\beta\,\gamma\,(\zeta)+2\,\mu\,\varphi\,(\zeta)$$

۴.
$$\lambda_1\lambda_3\lambda_2\lambda_4=\alpha^2\beta^2+\gamma^2\mu^2+\zeta^2\varphi^2-2\,\alpha\,\varphi\,(\zeta)\,\gamma-2\,\alpha\,\mu\,(\zeta)\,\beta-2\,\beta\,\varphi\,\mu\,\gamma$$

که در آن

$$\begin{array}{lll}\alpha=x_1+x_4, & \beta=x_2+x_4, & \gamma=x_3+x_4,\\ \mu=x_1+x_3, & \zeta=x_2+x_3, & \varphi=x_1+x_2,\end{array}$$

که حل این دستگاه معادلات کمی پیچیده می‌باشد. در این راه به ماتریس شبه سلول رسیدیم و توانستیم مساله مقدار ویژه آن را برای بعد ۴ × ۴ حل کنیم. برای این منظور با تعریف ماتریس شبه سلول و معادله مشخصه آن

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=0,$$

$$\begin{aligned}&\Delta_x(D(\overrightarrow{a})_{4\times4})=x^4\\&-((x_1+x_4)^2+(x_2+x_4)^2+(x_3+x_4)^2+(x_1+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+x_2)^2)x^2\\&-(2(x_1+x_4)(x_1+x_2)(x_2+x_4)+2(x_1+x_4)(x_1+x_3)(x_3+x_4)\\&+2(x_2+x_4)(x_2+x_3)(x_3+x_4)+2(x_1+x_3)(x_1+x_2)(x_2+x_3))x\\&-2(x_1+x_4)(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_4)-2(x_1+x_4)(x_1+x_3)(x_2+x_3)(x_2+x_4)\\&-2(x_2+x_4)(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_3+x_4)\\&+(x_1+x_4)^2(x_2+x_3)^2+(x_2+x_4)^2(x_1+x_3)^2+(x_3+x_4)^2(x_1+x_2)^2,\end{aligned}$$

با قرار دادن

$$x_i=-\frac{1}{2}\lambda_i$$

ماتریس شبه سلول مورد نظر بدست می‌آید.

مثال ۱.۳. فرض کنید $\sigma=\{10,-2,-3,-5\}$ طیف ماتریس یک ماتریس شبه سلول باشد توجه داریم که مجموع مقادیر ویژه داده شده باید صفر شود و مقدار ویژه اول مثبت و مابقی منفی هستند. در این صورت ماتریس شبه سلول $D\in\mathbb{R}_{4\times4}$ دارای طیف مورد نظر توسط بردار زیر ساخته می‌شود.

$$\overrightarrow{x}=(-5,1,\frac{3}{2},\frac{5}{2})$$

$$D(\overrightarrow{x})=\begin{bmatrix}0 & -7/2 & -5/2 & -4\\ -7/2 & 0 & 4 & 5/2\\ -5/2 & 4 & 0 & 7/2\\ -4 & 5/2 & 7/2 & 0\end{bmatrix}$$

توجه داریم که ماتریس مثبت

$$\widehat{D}(\overrightarrow{x})=\begin{bmatrix}0 & 7/2 & 5/2 & 4\\ 7/2 & 0 & 4 & 5/2\\ 5/2 & 4 & 0 & 7/2\\ 4 & 5/2 & 7/2 & 0\end{bmatrix}$$

نیز دارای طیف مورد نظر می‌باشد.

مراجع

[1] L. N. Trefethen, D. Bau, *Numerical linear algebra*. SIAM, Philadelphia, 1997.

[2] S. Khim, K.Rodtes and Phitsanulok, Inverse Eigenvalue Problem of Cell Matrices, Czechoslovak Mathematical Journal, 69 (144) (2019), 1015–1027.

[3] A.M. Nazari, F. Mahdinasab, Inverse eigenvalue problem of distance matrix via orthogonal matrix, Linear Algebra Appl. 450 (2014) 202-216.

نمایه نویسندگان

ا

آراد، فرشته*، ۴۵
آقاملایی، غلامرضا، ۲۲
اسحاقی، ندا، ۲۸
افتخاری، مهدی، ۲۲
ایزدی، محمد، ۲

ب

برائی‌نژاد، علی، ۸
بیاتی، سمیرا، ۱۲

پ

پورموسی، رضا*، ۱۸

ث

ثمره جهانی، مهسا*، ۲۲

ح

حسینی، سوده، ۶۰
حسینی، سید محمد مهدی، ۶۶
حیدری، محمد، ۲۸

د

دوستکی، رضا، ۶۶

ر

رجبی، هانیه*، ۵۴
رضوی، مهدی*، ۵۱
رفیع پور، ابوالفضل*، ۳۴
رفیعی ساردو، سامان*، ۶۰
رفیعی، امین، ۵۴

س

سعیدی، حبیب‌اله*، ۱۲

ش

شاهزاده فاضلی، سیدابوالفضل*، ۲۸
شفیعی، زهره، ۳۹
شیخی، ایوب، ۴۵

ص

صابری موحد، فرید، ۲۲

ع

عبدالهی، فرشید*، ۳۹

ف

فروتن‌نیا، داود*، ۸

*سخنران

ق
قاسمی‌نژاد، نازنین*، ۲

م
محرری، امیر محمد*، ۶۶
موسوی، فاطمه سادات*، ۷۱

ن
نظری، علی محمد، ۷۱

ی
یادگاری، معصومه، ۵۴